BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

BÙI KIM MY

ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH NGHIÊN CỨU MỘT SỐ BÀI TOÁN ELLIPTIC SUY BIẾN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội, 2019

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

BÙI KIM MY

ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH NGHIÊN CỨU MỘT SỐ BÀI TOÁN ELLIPTIC SUY BIẾN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán giải tích**

Mã số: **9 46 01 02**

Người hướng dẫn khoa học

PGS. TS Cung Thế Anh

HÀ NỘI, 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đều đã được sự nhất trí của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trình bày trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất trong bất kì công trình của ai khác.

Hà Nội, tháng 02 năm 2019

NCS Bùi Kim My

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành tại Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, dưới sự hướng dẫn tận tình chu đáo của PGS.TS Cung Thế Anh. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và vô cùng biết ơn tới Thầy, người đã truyền đạt kiến thức, kinh nghiệm học tập và nghiên cứu khoa học, định hướng tác giả tiếp cận hướng nghiên cứu thời sự, thú vị và có ý nghĩa.

Tác giả xin chân thành cảm ơn PGS.TS Khuất Văn Ninh, PGS.TS Nguyễn Năng Tâm, TS Trần Văn Bằng (trường ĐHSP Hà Nội 2), TS Phan Quốc Hưng (trường ĐH Duy Tân, Đà Nẵng) đã động viên và cho tác giả những góp ý, kinh nghiệm trong nghiên cứu khoa học giúp tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả cũng xin cảm ơn các Thầy, Cô và các Anh, Chị nghiên cứu sinh ở Xêmina Giải tích, Khoa Toán, trường ĐHSP Hà Nội 2 và Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã tạo một môi trường học tập, nghiên cứu khoa học sôi nổi và thân thiện, giúp tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn đến Ban Giám hiệu trường Đại học Duy Tân đã hỗ trợ một phần kinh phí để tác giả hoàn thành luận án này.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình, những người thân đã luôn ở bên, tin tưởng và cho tác giả động lực tinh thần để tác giả hoàn thành luận án này. Tác giả cũng xin cảm ơn các anh chị em, bạn bè đã giúp đỡ, động viên để tác giả hoàn thành luận án này.

Mục lục

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{R}^N$	không gian vectơ thực N chiều;
$\|\cdot\|$	chuẩn Euclide trong không gian $\mathbb{R}^N$;
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	đối ngẫu giữa X và X^*;
$(\cdot,\cdot)$	tích vô hướng trong không gian Hilbert X;
Q	số chiều thuần nhất của không gian $\mathbb{R}^N$;
$2^*_\lambda = \frac{2Q}{Q-2}$	số mũ tới hạn trong phép nhúng kiểu Sobolev;
$C_0^\infty(\Omega)$	không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω;
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm lũy thừa bậc p khả tích Lebesgue trong Ω;
$(\cdot,\cdot)_{L^p}$	tích vô hướng trong không gian $L^p(\Omega)$;
$\\|\cdot\\|_{L^p}$	chuẩn trong không gian $L^p(\Omega)$;
$\to$	hội tụ mạnh;
$\rightharpoonup$	hội tụ yếu;
$\hookrightarrow$	phép nhúng liên tục;
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	phép nhúng compact;
Δ_λ	toán tử suy biến mạnh $\Delta_\lambda := \sum\limits_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(\lambda_i^2 \partial_{x_i})$;
$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\lambda(\Omega)$	không gian hàm dùng để nghiên cứu bài toán trong Chương 2, 3;
$\\|\cdot\\|_{1,p}$	chuẩn trong không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\lambda(\Omega)$;
$W^{2,p}_\lambda(\Omega)$	không gian hàm dùng để nghiên cứu bài toán trong Chương 3;
$\\|\cdot\\|_{2,p}$	chuẩn trong không gian $W^{2,p}_\lambda(\Omega)$;
μ_1	giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\lambda$ với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;
A^s	lũy thừa bậc s của toán tử A với miền xác định $D(A^s)$.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Nhiều phương trình đạo hàm riêng loại elliptic gắn với việc nghiên cứu trạng thái dừng của các quá trình tiến hóa trong vật lí, hóa học, cơ học và sinh học. Mặt khác, nhiều lớp phương trình elliptic phi tuyến quan trọng cũng xuất phát từ các bài toán của hình học vi phân (xin xem các cuốn chuyên khảo [5, tr.75-138], [25, tr.309-367], [33, tr.13-216], [58, tr.7-68, 251-266], [74, tr.1-68]). Vì vậy, việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ. Một mặt việc nghiên cứu các phương trình elliptic thúc đẩy và cung cấp ý tưởng cho sự phát triển các công cụ và kết quả của nhiều chuyên ngành giải tích như Lí thuyết các không gian hàm, Giải tích hàm phi tuyến, Phép tính biến phân, ... Mặt khác, sự phát triển của các chuyên ngành này dẫn đến những tiến bộ lớn trong lí thuyết phương trình elliptic. Chính vì vậy lí thuyết phương trình elliptic đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới.

Trong những năm trở lại đây, sự tồn tại nghiệm, sự không tồn tại nghiệm, và các tính chất định tính của nghiệm đã được nghiên cứu cho nhiều lớp phương trình và hệ phương trình elliptic nửa tuyến tính trong trường hợp không suy biến hoặc suy biến yếu. Tuy nhiên, các kết quả tương ứng đối với các lớp phương trình và hệ phương trình elliptic trong trường hợp suy biến mạnh vẫn còn ít. Nguyên do là tính suy biến mạnh của hệ gây ra những khó khăn lớn về mặt toán học, đòi hỏi phải có những ý tưởng mới tiếp cận. Chẳng hạn, những khó khăn gây ra do thiếu các định lí nhúng cần thiết, do thiếu các kết quả cần thiết về tính chính quy nghiệm của bài toán tuyến tính tương ứng, do thiếu các kết quả về nguyên lí cực trị,

.... Việc nghiên cứu các phương trình và hệ phương trình elliptic suy biến mạnh đang là vấn đề thời sự, có nhiều ý nghĩa và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới.

Như đã nói ở trên, vấn đề nghiên cứu các bài toán elliptic bằng các phương pháp giải tích đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu phát triển. Trong vài thập kỉ gần đây, nhiều nhà toán học đã nghiên cứu và thu được nhiều kết quả về lí thuyết định tính nghiệm đối với nhiều lớp bài toán chứa toán tử elliptic và toán tử elliptic suy biến (xem, chẳng hạn các cuốn chuyên khảo [5, tr.75-138], [58, tr.7-68, 251-266], [74, tr.1-68] và các bài báo tổng quan gần đây [26, 38]). Trong lớp các toán tử suy biến, có một lớp đặc biệt quan trọng là lớp toán tử Δ_λ-Laplace có dạng

$$\Delta_\lambda u = \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(\lambda_i^2(x)\partial_{x_i} u),$$

trong đó λ_i là các hàm thỏa mãn một số điều kiện phù hợp. Lớp toán tử này được đưa ra bởi Kogoj và Lanconelli năm 2012 [39] (xem thêm [29]), và chứa nhiều lớp toán tử quan trọng như toán tử Laplace $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$ với $x \in \mathbb{R}^N$, toán tử Grushin $G_\alpha u = \Delta_x u + |x|^{2\alpha}\Delta_y u$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ (xem [34]), toán tử suy biến mạnh kiểu $P_{\alpha,\beta} u = \Delta_x u + |x|^{2\alpha}\Delta_y u + |y|^{2\beta}\Delta_z u$ với $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ (xem [67, 68]), ... Ở đó $|x|, |y|$ tương ứng là chuẩn Euclide của x, y trong không gian $\mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}$ và Δ_x là toán tử Laplace theo biến x trong $\mathbb{R}^{N_1} : \Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{N_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, Δ_y là toán tử Laplace theo biến y trong $\mathbb{R}^{N_2} : \Delta_y = \sum\limits_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$ và Δ_z là toán tử Laplace theo biến z trong $\mathbb{R}^{N_3} : \Delta_z = \sum\limits_{k=1}^{N_3} \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}$.

Sự tồn tại nghiệm đối với phương trình và hệ phương trình elliptic nửa tuyến tính không suy biến đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, trong cả trường hợp số hạng phi tuyến có tăng trưởng tới hạn và dưới tới hạn, trong cả miền bị chặn và không bị chặn (xem [1, 2, 13]). Sự không tồn tại nghiệm cổ điển đối với phương trình elliptic trong trường hợp miền hình sao và số hạng phi tuyến có tăng trưởng tới hạn và trên tới hạn được chứng tỏ trong công trình nổi tiếng của Pohozaev [55] và kết quả đó được mở rộng trong các công trình [47, 57].

Tuy nhiên, các kết quả về bài toán elliptic đối với lớp toán tử suy biến vẫn còn ít, chủ yếu là đối với phương trình vô hướng và với số hạng phi tuyến dạng tiêu chuẩn, xem [39, 51, 67] và các bài báo [1, 2, 3, 4, 10, 47, 50, 65] và các cuốn chuyên khảo [5, tr.75-138], [24, tr.1-26, 137-158], [58, tr.7-68, 251-266], [74, tr.1-68] về các kết quả tiêu biểu trong trường hợp toán tử Laplace.

Dưới đây, chúng tôi điểm qua một số kết quả quan trọng về sự tồn tại và tính chất định tính nghiệm đối với phương trình và hệ phương trình elliptic, liên quan đến nội dung của luận án.

- *Phương trình elliptic nửa tuyến tính.*

  Trong những thập kỉ qua, bài toán biên đối với phương trình elliptic nửa tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

  đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Nhiều vấn đề quan trọng đặt ra khi nghiên cứu lớp phương trình trên, chẳng hạn sự tồn tại nghiệm, tính chính quy của nghiệm, các đánh giá định tính đối với nghiệm, nghiên cứu sự ảnh hưởng tôpô của miền đang xét lên số nghiệm của phương trình, ... Có nhiều phương pháp đã được sử dụng để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán (1) chẳng hạn như: phương pháp nghiệm trên-nghiệm dưới (xem [25, tr.537-541]), phương pháp bậc tôpô (xem [42]), ... Tuy nhiên, một trong những phương pháp hữu hiệu để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trên đó là sử dụng phương pháp biến phân (xem [5, tr.75-138], [37, 59, tr.1-158], [74, tr.1-68]). Ý tưởng của phương pháp này là chuyển bài toán (1) về việc tìm các điểm tới hạn của một phiếm hàm Euler-Lagrange khả vi J liên kết với bài toán có dạng

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int\limits_{\Omega} F(x,u)dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega),$$

ở đó $F(x,t) = \int\limits_0^t f(x,s)ds$ là nguyên hàm của hàm f. Theo đó, điều kiện (AR) được đưa ra lần đầu tiên trong [4]

(AR) $\quad \exists R_0 > 0, \theta > 2$ sao cho

$$0 < \theta F(x,s) \le sf(x,s), \quad \forall |s| \ge R_0, \forall x \in \Omega,$$

đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu bài toán dạng (1). Điều kiện này không những đảm bảo cho phiếm hàm Euler-Lagrange J liên kết với bài toán (1) có cấu trúc hình học qua núi mà nó còn đảm bảo cho các dãy Palais-Smale của phiếm hàm Euler-Lagrange là bị chặn. Với điều kiện (AR) này, ta có thể sử dụng định lí qua núi dạng cổ điển của Ambrosetti và Rabinowitz (xem [4], [5, tr.117-129], [59, tr.7-22]) để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán trên. Mặc dù điều kiện (AR) được đưa ra một cách khá tự nhiên, nhưng có nhiều bài toán trong đó số hạng phi tuyến $f(x,s)$ không thỏa mãn điều kiện (AR), chẳng hạn hàm

$$f(x,s) = s\log(1+|s|).$$

Do đó, trong những năm gần đây, một số tác giả đã nghiên cứu bài toán (1) và loại bỏ đi điều kiện (AR), chẳng hạn, Schechter và Zou [62], Liu và Wang [44], Miyagaki và Souto [50], Liu [43], Lam và Lu

[40, 41], Binlin và cộng sự [12] (xem thêm các tài liệu tham khảo trong đó). Để loại bỏ điều kiện (AR) nhiều tác giả đưa ra một số điều kiện thay thế, chẳng hạn, điều kiện về tính lồi của nguyên hàm $F(x,s)$ (xem Schechter và Zou [62]), điều kiện về tính đơn điệu của $f(x,s)/s$ (xem Miyagaki và Souto [50]) điều kiện dạng $F(x,s)/s^2 \to 0$ khi $|s| \to +\infty$ (xem Lam và Lu [40, 41]).

Sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của bài toán (1) khi toán tử Laplace được thay thế bởi toán tử elliptic suy biến cũng được một số tác giả quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn, toán tử Grushin được giới thiệu lần đầu tiên trong [34], và ở đó tác giả đã chứng minh tính hypoelliptic của lớp toán tử này. Từ công trình tiên phong này, nhiều khía cạnh nghiên cứu khác đối với lớp toán tử này đã được công bố. Chẳng hạn, sự tồn tại nghiệm khi số hạng phi tuyến tăng trưởng dưới tới hạn và thỏa mãn điều kiện (AR) đã được chứng minh trong [68]; kết quả này sau đó được mở rộng sang cho trường hợp toán tử suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$ trong [67] (xem thêm [70]).

Năm 2017 nhiều tác giả nghiên cứu bài toán biên Dirichlet cho phương trình elliptic nửa tuyến tính có phần chính là toán tử suy biến mạnh Δ_λ, cụ thể là bài toán

$$\begin{cases} -\Delta_\lambda u + V(x)u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

trong đó Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Trong [39], nhờ thiết lập các đồng nhất thức tích phân kiểu Pohozaev, Kogoj và Lanconelli đã chứng tỏ được sự không tồn tại nghiệm cổ điển của bài toán (2) khi $V(x) \equiv 0$, và sử dụng phương pháp biến phân, các tác giả đã chứng minh được sự tồn tại và tính đa nghiệm của bài toán (2) khi $V(x)$ là hằng số. Ở đây số hạng phi tuyến $f(x,s)$ được xét có tăng trưởng dưới tới hạn và thỏa mãn điều kiện (AR). Một vài kết quả ban đầu về tính chính quy của nghiệm yếu cũng được chỉ ra trong đó. Trong trường hợp $V(x) \equiv \lambda$ với λ là một hằng số, một số kết quả khác về sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường cũng được chứng tỏ trong [45] (xem thêm [46]). Trong [18] Chen và cộng sự đã chứng minh được tính đa nghiệm của bài toán (2) trong miền bị chặn, ở đó hàm thế vị $V(x)$ là hàm liên tục, bị chặn dưới và cho phép có dấu thay đổi dưới các giả thiết phù hợp. Trong [61] tác giả nghiên cứu bài toán (2) với số hạng phi tuyến kiểu lồi-lõm, miền được xét là miền bị chặn, ở đó số hạng phi tuyến vẫn yêu cầu phải thỏa mãn điều kiện (AR). Trong trường hợp miền $\Omega = \mathbb{R}^N$, năm 2018 các tác giả N.M. Tri và D.T Luyen [71] đã chứng tỏ được tính đa nghiệm của bài toán (2), ở đó hàm thế vị và số hạng phi tuyến có thể không liên tục nhưng vẫn phải thỏa mãn điều kiện (AR) (xem thêm bài báo tổng quan rất gần đây [38]).

Như vậy có thể thấy rằng, đối với phương trình elliptic suy biến, các kết quả chủ yếu mới đạt được trong trường hợp số hạng phi tuyến thỏa mãn các điều kiện tiêu chuẩn (tức là tăng trưởng dưới tới hạn và thỏa mãn điều kiện (AR)). Theo hiểu biết của chúng tôi, vẫn còn khá nhiều vấn đề mở liên quan tới chủ đề này, chẳng hạn nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (2) khi số hạng phi tuyến $f(x, u)$ không thỏa mãn điều kiện (AR), hoặc số hạng phi tuyến có tăng trưởng tới hạn, ...

- *Hệ phương trình elliptic nửa tuyến tính dạng Hamilton.*

Bên cạnh các nghiên cứu cho phương trình elliptic vô hướng, các hệ phương trình elliptic cũng được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Một trong những lớp hệ elliptic điển hình là lớp hệ Hamilton có dạng sau:

$$\begin{cases} -\Delta u = |v|^{p-1}v, & x \in \Omega, \\ -\Delta v = |u|^{q-1}u, & x \in \Omega, \\ \quad u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

trong đó $p, q > 1$ và Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ với biên $\partial\Omega$ trơn. Với hệ (3), như đã chỉ ra trong [9, 22, 26, 28, 48, 54], [58, tr.251-263], ta có đường hyperbol tới hạn

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{N-2}{N}.$$

Khi cặp số mũ (p, q) nằm trên hoặc nằm phía trên đường cong này, tức là

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq \frac{N-2}{N},$$

thì sự không tồn tại của nghiệm cổ điển dương của hệ (3) trong miền hình sao bị chặn đã được chứng minh (xem [47, 57]). Phương pháp được sử dụng là thiết lập đồng nhất thức kiểu Pohozaev phù hợp với hệ (3) và khai thác cấu trúc hình học của miền đang xét. Trong trường hợp hệ elliptic suy biến chứa toán tử Grushin, cũng bằng cách thiết lập các đồng nhất thức tích phân kiểu Pohozaev mở rộng, một số tác giả cũng đạt được một vài kết quả về sự không tồn tại nghiệm của bài toán biên cho hệ Hamilton/gradient suy biến (xem [19, 20, 21] và các tài liệu được trích dẫn trong đó).

Trong khi đó, nếu cặp số mũ (p, q) nằm phía dưới đường hyperbol tới hạn, nhờ sử dụng phương pháp biến phân và Định lí Fountain được thiết lập bởi Bartsch và Figueiredo [9], sự tồn tại của một dãy vô hạn nghiệm yếu của hệ (3) được chứng minh (xem [28, 72] và bài báo tổng quan [26]). Tương tự như đối với phương trình vô hướng, ta cũng tìm nghiệm yếu của hệ (3) là các điểm tới hạn của phiếm hàm liên kết với hệ (3) có dạng

$$\Phi(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx.$$

Không gian năng lượng tự nhiên để xét bài toán (3) là không gian Hilbert $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Tuy nhiên, với cách lựa chọn không gian này sẽ phải áp đặt điều kiện lên p, q là $p, q \leq \frac{N+2}{N-2}$, điều này là do phép nhúng Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$. Để loại bỏ hạn chế này, ta có thể sử dụng các không gian bậc phân được định nghĩa thông qua khai triển Fourier của các hàm riêng của toán tử Laplace (xem [28, 36]). Ngoài ra, ta cũng có thể loại bỏ hạn chế này bằng cách tiếp cận sử dụng không gian Orlicz (xem [27]).

Tuy nhiên, đối với hệ phương trình elliptic chứa toán tử suy biến, các kết quả tương ứng vẫn còn ít; chẳng hạn, sự tồn tại nghiệm, tính đa nghiệm và sự không tồn tại nghiệm của hệ có dạng (3) khi toán tử Laplace được thay bằng toán tử elliptic suy biến mạnh Δ_λ vẫn chưa được nghiên cứu.

- *Các định lí kiểu Liouville cho phương trình và hệ phương trình elliptic.*

Trong những năm gần đây, một trong những chủ đề rất thời sự là nghiên cứu các định lí kiểu Liouville cho phương trình và hệ phương trình elliptic. Nội dung của Định lí kiểu Liouville là khẳng định không tồn tại nghiệm trong toàn không gian hoặc nửa không gian. Định lí Liouville cổ điển được phát biểu như sau: *"Một hàm điều hòa (hoặc chỉnh hình) bị chặn trong toàn không gian thì hàm đó phải là hằng số".* Phát biểu này được Liouville đưa ra năm 1844 và sau đó Cauchy [14] đã đưa ra chứng minh đầu tiên của định lí này (xem thêm [8, tr.31-32, 45-47]). Kết quả cổ điển này sau đó đã được mở rộng cho các nghiệm không âm của phương trình elliptic nửa tuyến tính

$$-\Delta u = u^p$$

trong toàn không gian $\mathbb{R}^N$ bởi Gidas và Spruck [31, 32] (xem thêm bài báo của Chen và Li [17]). Trong đó họ chứng minh được rằng, nếu $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ thì phương trình ở trên chỉ có nghiệm tầm thường $u \equiv 0$ và kết quả này là tối ưu theo nghĩa, nếu $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ thì phương trình trên tồn tại nghiệm. Tương tự kết quả như đối với phương trình, với bất đẳng thức dạng

$$-\Delta u \geq u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

cũng không có nghiệm không tầm thường nếu $1 < p \leq \frac{N}{N-2}$ và kết quả này cũng là tối ưu (xem [30]). Định lí Liouville cho phương trình elliptic nửa tuyến tính hoặc bất đẳng thức trên một nón Σ trong $\mathbb{R}^N$ cũng đã được Dolcetta, Berestycki và Nirenberg nghiên cứu trong [11].

Trong những năm gần đây, các định lí kiểu Liouville đã chứng tỏ là một trong những công cụ mạnh để nghiên cứu tính chất định tính nghiệm cho các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến. Từ các định lí kiểu Liouville ta có thể thu được các kết quả khác nhau về tính chất định tính của nghiệm, chẳng hạn như tính phổ quát, các ước lượng tiên nghiệm theo từng điểm của nghiệm địa phương, các đánh giá phổ quát và kì dị, đánh giá độ suy giảm, tốc độ bùng nổ (blow-up) của nghiệm, ..., (xem bài báo [56] và các tài liệu trong đó).

Gần đây, các định lí kiểu Liouville cho phương trình elliptic suy biến đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Định lí Liouville đã được mở rộng cho các hàm p-điều hòa trong toàn không gian $\mathbb{R}^N$ và trên các miền ngoài bởi Serrin và Zou trong [64]. Định lí Liouville cho bất đẳng thức elliptic nửa tuyến tính chứa toán tử Grushin đã được thiết lập bởi Dolcetta và Cutrì trong [23]. Ở đó, họ nghiên cứu bài toán sau

$$u \geq 0, \ -G_k u \geq u^p, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2},$$

trong đó $G_k u = \Delta_x u + |x|^{2k}\Delta_y u$, $k > 1$, là toán tử Grushin và họ chứng tỏ được rằng chỉ có nghiệm không âm của bài toán này là $u \equiv 0$ nếu $1 < p \leq \frac{Q}{Q-2}$ với $Q = N_1 + (k+1)N_2$ là số chiều thuần nhất của không gian. Trong [6], D'Ambrosio và Lucente nghiên cứu điều kiện cần cho sự tồn tại nghiệm yếu của bất đẳng thức với toán tử vi phân tựa thuần nhất có dạng

$$L(x,y,D_x,D_y)u \geq \frac{|u|^p}{|x|^{\theta_1}|y|^{\theta_2}}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k,$$

với $q > 1$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $k, d \geq 1$, và trong đó họ cũng xét một vài trường hợp đặc biệt và thu được các định lí kiểu Liouville cho toán tử Tricomi và toán tử Grushin. Sau đó, Monti và Morbidelli trong [51] đã sử dụng phương pháp mặt phẳng di động để nghiên cứu tính chất đối xứng của nghiệm cho phương trình tới hạn dạng

$$u \geq 0, \ -L_\alpha u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2},$$

ở đó $L_\alpha u = \Delta_x u + (\alpha+1)^2|x|^{2\alpha}\Delta_y u$ và $\alpha > 0, Q = N_1 + (\alpha+1)N_2$. Với các kết quả Liouville trong trường hợp $p \in (\frac{Q}{Q-2}, \frac{Q+2}{Q-2})$ cho phương trình chứa toán tử Grushin (xem bài báo gần đây của Monticelli [52]), trong đó để thu được định lí Liouville, họ khai thác tính bất biến của phương trình theo biến đổi Kelvin và thực hiện kĩ thuật mặt phẳng di động theo các hướng song song với mặt suy biến của toán tử. Trong [73], Yu nghiên cứu phương trình

$$-L_\alpha u = f(u), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2},$$

và dưới một vài giả thiết trên số hạng phi tuyến f, đã chứng tỏ phương trình trên không có nghiệm yếu dương. Ở đây kĩ thuật chính được sử dụng và phương pháp mặt phẳng di động dạng tích phân.

Bên cạnh việc thiết lập các định lí Liouville cho các phương trình và các bất đẳng thức vô hướng, các định lí Liouville cho hệ phương trình và hệ bất đẳng thức elliptic cũng thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả. Như đã được chứng minh trong [63, 66] và [49], hệ bất đẳng thức elliptic dạng

$$\begin{cases} -\Delta u \geq v^p, & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v \geq u^q, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

không có nghiệm không âm $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ nếu $pq \leq 1$, hoặc $pq > 1$ và $\max(a, b) \geq N - 2$, với $a = \frac{2(p+1)}{pq-1}$ và $b = \frac{2(q+1)}{pq-1}$. Ta biết rằng, giả thuyết Lane-Emden phát biểu rằng hệ elliptic

$$\begin{cases} -\Delta u = v^p, & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta v = u^q, & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

với $p, q > 0$, không có nghiệm cổ điển dương nếu cặp (p, q) thỏa mãn

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N}.$$

Giả thuyết này đã được chứng minh cho các nghiệm đối xứng cầu, tức là $u(x) = u(|x|), v(x) = v(|x|)$ trong các không gian với số chiều bất kì trong [48]. Với các nghiệm không đối xứng cầu, giả thuyết Lane-Emden mới chỉ được chứng minh là đúng với số chiều $N \leq 2$ bởi Mitidieri và Pohozaev [49], với $N = 3$ bởi Serrin và Zou [63], và với $N = 4$ bởi Souplet [65]. Khi $N \geq 5$, theo hiểu biết của chúng tôi giả thiết này vẫn hoàn toàn mở. Bên cạnh đó, một hướng nghiên cứu rất thời sự khác hiện nay liên quan đến chủ đề này là thiết lập các định lí kiểu Liouville cho nghiệm ổn định hoặc ổn định bên ngoài một tập compact. Về hướng nghiên cứu này xin xem cuốn chuyên khảo [24, tr.137-158] và một số kết quả gần đây cho toán tử suy biến [7, 60, 69].

Như vậy, ta có thể thấy rằng các định lí kiểu Liouville mới chỉ được chứng minh cho một vài lớp toán tử suy biến yếu và các kết quả đạt được vẫn còn ít; các kết quả cho trường hợp toán tử suy biến mạnh, nói riêng là lớp toán tử suy biến Δ_λ, trong nhiều trường hợp vẫn còn mở.

Tóm lại, với những phân tích ở trên, ta thấy rằng, bên cạnh các kết quả đã đạt được, các bài toán đối với phương trình, hệ phương trình elliptic chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ vẫn còn nhiều vấn đề mở, chẳng hạn:

- Sự tồn tại và tính đa nghiệm của phương trình elliptic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh có dạng
$$\begin{cases} -\Delta_\lambda u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$
trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ và số hạng phi tuyến $f(x,u)$ không thỏa mãn điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz.

- Sự tồn tại, không tồn tại và tính đa nghiệm của hệ Hamilton elliptic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến Δ_λ có dạng
$$\begin{cases} -\Delta_\lambda u = |v|^{p-1}v, & x \in \Omega, \\ -\Delta_\lambda v = |u|^{q-1}u, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$
với $p, q > 1$ và Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N, N \geq 3$.

- Các định lí kiểu Liouville cho phương trình và hệ phương trình elliptic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ. Cụ thể, thiết lập các định lí kiểu Liouville cho bất đẳng thức

$$-\Delta_\lambda u \geq u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (N \geq 2, p > 1), \tag{6}$$

và hệ bất đẳng thức

$$\begin{cases} -\Delta_\lambda u & \geq v^p, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_\lambda v & \geq u^q, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \qquad (N \geq 2, p, q > 0). \tag{7}$$

Vì vậy, trong luận án này chúng tôi tập trung vào nghiên cứu sự tồn tại và không tồn tại nghiệm, tính đa nghiệm, và thiết lập các định lí kiểu Liouville cho các phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình elliptic chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ.

2. Mục đích nghiên cứu

Luận án này tập trung nghiên cứu một số lớp phương trình và hệ phương trình elliptic suy biến mạnh chứa toán tử Δ_λ bằng các phương pháp của Giải tích hàm phi tuyến. Cụ thể là những vấn đề sau:

- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu;
- Nghiên cứu tính đa nghiệm;
- Nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm cổ điển không âm trong miền kiểu hình sao;
- Nghiên cứu các định lí kiểu Liouville về sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương trong toàn không gian.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với các mục đích đặt ra như trên, trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau:

- **Nội dung 1.** Nghiên cứu sự tồn tại và tính đa nghiệm trong trường hợp dưới tới hạn của phương trình elliptic nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_λ với số hạng phi tuyến không thỏa mãn điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz.

- **Nội dung 2.** Nghiên cứu sự tồn tại, không tồn tại và tính đa nghiệm trong trường hợp số hạng phi tuyến dưới tới hạn của hệ Hamilton elliptic nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_λ.

- **Nội dung 3.** Nghiên cứu các định lí kiểu Liouville cho hệ bất đẳng thức elliptic nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_λ.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và tính đa nghiệm chúng tôi sử dụng phương pháp biến phân và các định lí tổng quát của lí thuyết tới hạn.

- Để nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm chúng tôi thiết lập các đồng nhất thức kiểu Pohozaev phù hợp và khai thác cấu trúc hình học của miền đang xét.

- Để nghiên cứu các định lí kiểu Liouville chúng tôi sử dụng phương pháp hàm thử và thiết lập các ước lượng tích phân phù hợp.

5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- Chứng minh được sự tồn tại của nghiệm yếu không tầm thường của bài toán (4) khi số hạng phi tuyến có tăng trưởng đa thức dưới tới hạn và không thỏa mãn điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz. Ngoài ra, khi số hạng phi tuyến là hàm lẻ theo biến ẩn hàm, chúng tôi chứng minh được tính đa nghiệm của bài toán (4). Đây là nội dung chính của Chương 2.

- Chứng minh được sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương đối với hệ Hamilton (5) trong trường hợp miền đang xét là miền hình sao. Chứng minh được tính đa nghiệm của hệ (5) trong trường hợp số mũ p, q nằm dưới đường hyperbol tới hạn. Đây là nội dung chính của Chương 3.

- Thiết lập được các định lí kiểu Liouville về sự không tồn tại nghiệm cổ điển không âm của bất đẳng thức (6) và hệ bất đẳng thức elliptic (7) trong toàn không gian. Đây là nội dung chính của Chương 4.

Các kết quả mới của luận án là những đóng góp có ý nghĩa khoa học cho Lí thuyết Giải tích hàm phi tuyến ứng dụng và Lí thuyết phương trình elliptic; góp phần vào việc hoàn thiện các lí thuyết này và giải quyết một số vấn đề mở mà nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố trong 03 bài báo trên các tạp chí khoa học chuyên ngành quốc tế có uy tín (trong danh mục ISI) và đã được báo cáo tại:

- Xêmina Giải tích của Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;

- Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

- Hội thảo khoa học "Toán học trong sự nghiệp đổi mới giáo dục", Đại học Sư phạm Hà Nội 2, 10/2017.

6. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình được công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương:

- Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho các chương sau;
- Chương 2 trình bày các kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính trong miền bị chặn với số hạng phi tuyến có tăng trưởng đa thức dưới tới hạn;
- Chương 3 trình bày các kết quả về sự không tồn tại nghiệm cổ điển, sự tồn tại nghiệm yếu của hệ Hamilton suy biến trong miền bị chặn;
- Chương 4 trình bày các định lí kiểu Liouville của hệ bất đẳng thức elliptic suy biến trong toàn không gian.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả phục vụ cho các chương sau, cụ thể chúng tôi trình bày: Định nghĩa toán tử elliptic suy biến mạnh Δ_λ, một số không gian hàm, các kết quả về phép nhúng, về giá trị riêng, vectơ riêng của toán tử Δ_λ, một số kết quả của phương pháp biến phân và lí thuyết điểm tới hạn và một số kiến thức bổ trợ khác.

1.1. Toán tử Δ_λ-Laplace

Ta xét toán tử có dạng

$$\Delta_\lambda := \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(\lambda_i^2 \partial_{x_i}),$$

trong đó $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, N$. Ở đây, các hàm $\lambda_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ là liên tục trên $\mathbb{R}^N$, dương ngặt và thuộc lớp C^1 bên ngoài các siêu phẳng tọa độ, tức là, $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, N$ trong $\mathbb{R}^N \setminus \Pi$, ở đó

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \prod_{i=1}^{N} x_i = 0\}.$$

Như trong [39] ta giả thiết các hàm λ_i thỏa mãn các tính chất sau:

1) $\lambda_1(x) \equiv 1,\ \lambda_i(x) = \lambda_i(x_1, \ldots, x_{i-1}), i = 2, \ldots, N;$

2) Với mỗi $x \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_i(x) = \lambda_i(x^*), i = 1, \ldots, N$, với

$$x^* = (|x_1|, \ldots, |x_N|) \text{ nếu } x = (x_1, \ldots, x_N);$$

3) Tồn tại hằng số $\rho \geq 0$ sao cho

$$0 \leq x_k \partial_{x_k} \lambda_i(x) \leq \rho \lambda_i(x) \quad \forall k \in \{1, \ldots, i-1\}, i = 2, \ldots, N,$$

và với mỗi $x \in \mathbb{R}^N_+ := \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, N\}$;

4) Tồn tại nhóm co dãn $\{\delta_t\}_{t>0}$

$$\delta_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \delta_t(x) = \delta_t(x_1, \ldots, x_N) = (t^{\epsilon_1} x_1, \ldots, t^{\epsilon_N} x_N),$$

với $1 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \cdots \leq \epsilon_N$, sao cho λ_i là δ_t-thuần nhất bậc $\epsilon_i - 1$, tức là,

$$\lambda_i(\delta_t(x)) = t^{\epsilon_i - 1}\lambda_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, t > 0, i = 1, \ldots, N.$$

Từ điều này, ta có toán tử Δ_λ là δ_t-thuần nhất bậc 2, nghĩa là,

$$\Delta_\lambda(u(\delta_t(x))) = t^2(\Delta_\lambda u)(\delta_t(x)), \quad \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Ta kí hiệu Q là số chiều thuần nhất của không gian $\mathbb{R}^N$ đối với nhóm $\{\delta_t\}_{t>0}$, tức là

$$Q := \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_N.$$

Số chiều thuần nhất Q này đóng vai trò rất quan trọng cả trong cấu trúc hình học và phiếm hàm liên kết với toán tử Δ_λ.

Nhận xét 1.1. Như đã chỉ ra trong [39], nếu các hàm λ_i là trơn thì bằng cách sử dụng tiêu chuẩn của Hörmander trong [35], có thể chứng minh được rằng toán tử Δ_λ là hypoelliptic (nhưng không là elliptic theo nghĩa thông thường, trừ trường hợp tất cả các λ_i đều là hằng số).

Dưới đây ta trình bày một số ví dụ thường gặp về lớp toán tử Δ_λ (ngoài trường hợp tầm thường không suy biến là toán tử Laplace).

Ví dụ 1.1 (Toán tử Grushin (xem [34]))**.** Cho $\alpha \geq 0$ là một số thực, toán tử Grushin là toán tử có dạng

$$G_\alpha = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2},$$

trong đó $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, $|x|$ là chuẩn Euclide của x trong không gian $\mathbb{R}^{N_1}$ và $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ xác định bởi

$$\lambda_i(x, y) = 1,\ i = 1, \ldots, N_1, \quad \lambda_j(x, y) = |x|^\alpha,\ j = 1, \ldots, N_2.$$

Nhóm co dãn $\{\delta_t\}_{t>0}$ xác định bởi: $\quad \delta_t(x, y) = (tx, t^{1+\alpha}y)$.

Số chiều thuần nhất tương ứng với nhóm $\{\delta_t\}_{t>0}$ là $N_\alpha = N_1 + N_2(1 + \alpha)$.

Ví dụ 1.2 (Toán tử suy biến kiểu $P_{\alpha,\beta,\gamma}$). Cho $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ là các số thực. Xét toán tử

$$P_{\alpha,\beta,\gamma} = \Delta_x + |x|^{2\alpha}\Delta_y + |x|^{2\beta}|y|^{2\gamma}\Delta_z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3},$$

với $N_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, 2, 3$, $|x|, |y|$ tương ứng là chuẩn Euclide của x, y trong không gian $\mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}$ và $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})$ xác định bởi

$$\begin{aligned}
\lambda_j^{(1)}(x, y, z) &\equiv 1, \quad j = 1, \ldots, N_1,\\
\lambda_k^{(2)}(x, y, z) &= |x|^\alpha, \quad k = 1, \ldots, N_2,\\
\lambda_l^{(3)}(x, y, z) &= |x|^\beta|y|^\gamma, \quad l = 1, \ldots, N_3.
\end{aligned}$$

Nhóm co dãn $\{\delta_t\}_{t>0}$ tương ứng là

$$\delta_t(x, y, z) = (tx, t^{1+\alpha}y, t^{1+\beta+(1+\alpha)\gamma}z),$$

và số chiều thuần nhất là

$$Q = N_1 + (1 + \alpha)N_2 + [1 + \beta + (1 + \alpha)\gamma]N_3.$$

Khi $\alpha = 0$ thì toán tử này trở thành toán tử suy biến kiểu $P_{\beta,\gamma}$ được xét trong [68] (xem thêm [67]).

Ví dụ 1.3. Tổng quát hơn, ta xét đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ với $\alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, k-1$. Ta định nghĩa toán tử

$$\Delta_\lambda = \Delta_{x^{(1)}} + |x^{(1)}|^{2\alpha_1}\Delta_{x^{(1)}} + |x^{(2)}|^{2\alpha_2}\Delta_{x^{(3)}} + \cdots + |x^{(k-1)}|^{2\alpha_{k-1}}\Delta_{x^{(k)}},$$

với $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_k}, N_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \dots, k$ và $|x^{(i)}|$ là chuẩn Euclide trong không gian $\mathbb{R}^{N_i}, i = 1, \dots, k$. Khi đó, hàm $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ xác định bởi

$$\lambda_1(x) \equiv 1, \quad \lambda_i(x) = |x^{(i-1)}|^{\alpha_{i-1}},\ i = 2, \dots, k,$$

và nhóm co dãn tương ứng là

$$\delta_t(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}) = (t^{\epsilon_1} x^{(1)}, t^{\epsilon_2} x^{(2)}, \dots, t^{\epsilon_k} x^{(k)})$$

với $\epsilon_1 = 1, \epsilon_i = 1 + \alpha_{i-1}\epsilon_{i-1}$ với $i = 2, \dots, k$. Số chiều thuần nhất tương ứng là

$$Q = \epsilon_1 N_1 + \epsilon_2 N_2 + \cdots + \epsilon_k N_k.$$

1.2. Các không gian hàm và phép nhúng

Trước tiên, chúng tôi giới thiệu một số không gian hàm được sử dụng để nghiên cứu bài toán trong Chương 2 và Chương 3 của luận án.

Với $1 \le p < +\infty$, ta kí hiệu không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\lambda}(\Omega)$ là bao đóng của không gian $C_0^\infty(\Omega)$ trong chuẩn

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\lambda}} = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla_\lambda u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ở đó $\nabla_\lambda u = (\lambda_1 \partial_{x_1} u, \dots, \lambda_N \partial_{x_N} u)$.

Ta thấy không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\lambda}(\Omega)$ là không gian Banach và khi $p = 2$ thì $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla_\lambda u \cdot \nabla_\lambda v \, dx,$$

và chuẩn tương ứng là

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_\Omega |\nabla_\lambda u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tiếp theo, ta định nghĩa $W^{2,p}_\lambda(\Omega)$ là không gian gồm tất cả các hàm u sao cho

$$u \in L^p(\Omega),\ \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \in L^p(\Omega),$$

với $i, j = 1, 2, \ldots, N$ và chuẩn tương ứng là

$$\|u\|_{W^{2,p}_\lambda} = \left(\int\limits_\Omega \left[|u|^p + |\nabla_\lambda u|^p + \sum_{i,j=1}^N \left|\lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j})\right|^p\right] dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ta cũng thấy rằng không gian $W^{2,p}_\lambda(\Omega)$ là không gian Banach. Đặc biệt, khi $p = 2$, không gian $W^{2,2}_\lambda(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\begin{aligned}(u, v)_{W^{2,2}_\lambda} = (u, v)_{L^2} &+ \sum_{i=1}^N (\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \lambda_i \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2} \\ &+ \sum_{i,j=1}^N \left(\lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j}), \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j \frac{\partial v}{\partial x_j})\right)_{L^2},\end{aligned}$$

ở đó $(f, g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ với $f, g \in L^2(\Omega)$.

Từ Mệnh đề 3.2 và Định lí 3.3 trong [39], ta có kết quả về các phép nhúng thường được sử dụng về sau trong luận án.

Mệnh đề 1.1 ([39])**.** *Giả sử các hàm $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, N$ thỏa mãn các điều kiện 1)-4) ở Mục 1.1 và $Q > 2$. Khi đó phép nhúng*

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*_\lambda}(\Omega),\ \textit{trong đó } 2^*_\lambda = \frac{2Q}{Q-2},$$

là liên tục. Hơn nữa, phép nhúng

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$$

là compact với mỗi $\gamma \in [1, 2^*_\lambda)$.

Bây giờ, chúng tôi thiết lập phép nhúng quan trọng sau.

Mệnh đề 1.2. *Giả sử các hàm $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, N$ thỏa mãn các điều kiện 1)-4) ở Mục 1.1 và $Q > 4$. Khi đó phép nhúng $W^{2,2}_\lambda(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$ là liên tục với $1 \le \gamma \le \frac{2Q}{Q-4}$.*

Chứng minh. Với mỗi $u \in C_0^\infty(\Omega)$, ta có

$$\|u\|_{W^{2,2}_\lambda} = \left(\|u\|^2_{L^2} + \|\nabla_\lambda u\|^2_{L^2} + \sum_{i,j=1}^N \|\lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j})\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

và

$$\lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \in L^2(\Omega), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Do đó

$$\|\nabla_\lambda u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda} = \|\nabla_\lambda(\nabla_\lambda u)\|^2_{L^2} = \sum_{i,j=1}^N \int\limits_\Omega \left|\lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j})\right|^2 dx < +\infty. \tag{1.1}$$

Từ đó, các hàm $\lambda_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega), j = 1, \ldots, N$ và bởi Mệnh đề 1.1 ta có $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*_\lambda}(\Omega)$, và do vậy

$$\|\nabla_\lambda u\|_{L^{2^*_\lambda}} \le C\|\nabla_\lambda u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda}. \tag{1.2}$$

Từ điều này ta thu được $\lambda_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{2^*_\lambda}(\Omega), j = 1, \ldots, N$ và do định nghĩa của không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\lambda(\Omega)$ với $p = 2^*_\lambda$, ta suy ra rằng $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2^*_\lambda}_\lambda(\Omega)$. Ta lại áp dụng Mệnh đề 1.1 một lần nữa và thu được

$$\|u\|_{L^{\frac{2^*_\lambda Q}{Q-2^*_\lambda}}} \le C\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2^*_\lambda}_\lambda}. \tag{1.3}$$

Từ (1.1), (1.2) và (1.3), ta đạt được

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{\frac{2Q}{Q-4}}} &\le C\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2^*_\lambda}_\lambda} = \|\nabla_\lambda u\|_{L^{2^*_\lambda}}\\ &\le C\|\nabla_\lambda u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\left(\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\left|\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j\frac{\partial u}{\partial x_j})\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\left(\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla_\lambda u\|_{L^2}^2+\|\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda_j\frac{\partial u}{\partial x_j})\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= C\|u\|_{W_\lambda^{2,2}}.
\end{aligned}
$$

Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Xét bài toán biên Dirichlet thuần nhất sau đối với toán tử Δ_λ-Laplace:

$$
\begin{cases}
-\Delta_\lambda u &= f(x) \quad \text{trong } \Omega,\\
u &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{1.4}
$$

Mệnh đề 1.3. *Toán tử* $-\Delta_\lambda : \overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega))'$ *là một song ánh, ở đó* $(\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega))'$ *là không gian đối ngẫu của* $\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)$.

Chứng minh. Ta có

$$
(-\Delta_\lambda u, u) = \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)} \text{ và } (-\Delta_\lambda u, u) \leq \|-\Delta_\lambda u\|_{(\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega))'}\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)}.
$$

Do đó, theo bất đẳng thức Poincaré,

$$
C\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)} \leq \|\nabla_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} = (-\Delta_\lambda u, u) \leq \|-\Delta_\lambda u\|_{(\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega))'}\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)}.
$$

Hay

$$
C\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)} \leq \|-\Delta_\lambda u\|_{(\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega))'}.
$$

Từ bất đẳng thức này ta suy ra $-\Delta_\lambda$ là đơn ánh với miền giá trị $R(-\Delta_\lambda)$ là tập đóng.

Ta chứng tỏ $-\Delta_\lambda$ là toàn ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)$ trực giao với miền giá trị $R(-\Delta_\lambda) \subset (\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega))'$, tức là

$$
(-\Delta_\lambda u, u_0) = 0, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega).
$$

Lấy $u = u_0$, khi đó

$$C\|u_0\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} \le \|\nabla_\lambda u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = (-\Delta_\lambda u_0, u_0) = 0,$$

từ đó $u_0 = 0$.

Vậy $-\Delta_\lambda$ là toàn ánh, tức là $R(-\Delta_\lambda) = (\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega))'$. □

Hệ quả 1.1. *Với mỗi $f \in L^2(\Omega)$, bài toán Dirichlet (1.4) có duy nhất nghiệm yếu $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$.*

Chứng minh. Do $f \in L^2(\Omega) \subset (\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega))'$, nên từ định lí trên, tồn tại duy nhất $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ sao cho

$$(-\Delta_\lambda u, v) = (\nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v) = (f, v), \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Điều này chứng tỏ u là nghiệm yếu của bài toán (1.4). □

Nhờ Mệnh đề 1.3, ta có tồn tại toán tử nghịch đảo $T = (-\Delta_\lambda)^{-1} : (\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega))' \to \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ của toán tử $-\Delta_\lambda$. Khi đó, ta có khẳng định sau.

Mệnh đề 1.4. *Toán tử nghịch đảo T của toán tử $-\Delta_\lambda$ là toán tử xác định dương, tự liên hợp và compact trong $L^2(\Omega)$.*

Chứng minh. Từ Hệ quả 1.1, ta thấy với mỗi $\varphi \in L^2(\Omega)$, tồn tại duy nhất $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ sao cho $-\Delta_\lambda u = \varphi$. Khi đó,

$$\begin{aligned}(T\varphi, \varphi) &= (T(-\Delta_\lambda u), -\Delta_\lambda u) = (T(-\Delta_\lambda)u, -\Delta_\lambda u) = (u, -\Delta_\lambda u) \\ &= \|\nabla_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} \ge C\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)},\end{aligned}$$

ở đó hằng số C là dương. Do đó, T là toán tử xác định dương.

Với $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$, đặt $\varphi = -\Delta_\lambda u$ và $\psi = -\Delta_\lambda v$. Khi đó,

$$(T\varphi, \psi) = (T(-\Delta_\lambda u), -\Delta_\lambda v) = (T(-\Delta_\lambda)u, -\Delta_\lambda v)$$

$$= (u, -\Delta_\lambda v) = (\nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v) = (-\Delta_\lambda u, v) = (\varphi, T\psi).$$

Do đó, đặc biệt trong $L^2(\Omega)$, ta có

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(\Omega).$$

Đẳng thức này chứng tỏ khi hạn chế trên $L^2(\Omega)$, toán tử $T = (-\Delta_\lambda)^{-1}$ là toán tử tự liên hợp. Hơn nữa, do phép nhúng $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ là compact nên toán tử T hạn chế trên $L^2(\Omega)$,

$$T = (-\Delta_\lambda)^{-1} : L^2(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

là toán tử compact, tự liên hợp trong $L^2(\Omega)$.

□

Từ Mệnh đề 1.4, ta suy ra tồn tại dãy hàm riêng $\varphi_j \in L^2(\Omega)$ của toán tử T là một cơ sở trực giao trong $L^2(\Omega)$ ứng với các giá trị riêng $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ trong đó

$$\gamma_j \to 0 \text{ khi } j \to +\infty.$$

Mặt khác, vì

$$T : L^2(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

nên $\varphi_j \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ với mọi $j = 1, 2, \ldots$. Hơn nữa, vì

$$\varphi_j = T^{-1}(T\varphi_j) = T^{-1}(\gamma_j \varphi_j) = \gamma_j(-\Delta_\lambda \varphi_j),$$

nên

$$-\Delta_\lambda \varphi_j = \frac{1}{\gamma_j}\varphi_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots.$$

Điều này chứng tỏ rằng, toán tử $-\Delta_\lambda$ có dãy các hàm riêng $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ ứng với dãy các giá trị riêng $\{\mu_j = \frac{1}{\gamma_j}\}_{j=1}^\infty$ thỏa mãn

$$0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_j \le \cdots, \quad \mu_j \to +\infty \text{ khi } j \to +\infty.$$

1.3. Một vài kết quả của lí thuyết điểm tới hạn

Trước tiên ta nhớ lại một vài khái niệm đạo hàm của phiếm hàm trên không gian Banach.

Cho X là không gian Banach phản xạ và X^* là không gian đối ngẫu của X.

Định nghĩa 1.1. Cho U là một tập con mở trong không gian X. Khi đó, ta nói phiếm hàm $J : U \to \mathbb{R}$ có đạo hàm Gateaux tại điểm $u \in U$ nếu tồn tại $f \in X^*$ sao cho với mọi $h \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u+th) - J(u) - \langle f, th \rangle}{t} = 0.$$

Đạo hàm Gateaux tại u của phiếm hàm J được kí hiệu là $J'(u)$.

Định nghĩa 1.2. Ta nói phiếm hàm J có đạo hàm Fréchet tại $u \in U$ nếu tồn tại $f \in X^*$ sao cho

$$\lim_{h \to 0} \frac{J(u+h) - J(u) - \langle f, h \rangle}{\|h\|_X} = 0.$$

Ta nói phiếm hàm $J \in C^1(U, \mathbb{R})$ nếu đạo hàm Fréchet của J tồn tại và liên tục tại mọi điểm $u \in U$.

Dễ thấy rằng nếu J khả vi Fréchet thì J cũng khả vi Gateaux. Điều ngược lại không phải luôn đúng, tuy nhiên nếu đạo hàm Gateaux J' là liên tục thì J cũng khả vi Fréchet.

Khi đó, một điểm $x \in X$ được gọi là một điểm tới hạn của phiếm hàm J nếu $J'(x) = 0$. Số $c \in \mathbb{R}$ được gọi là một giá trị tới hạn của phiếm hàm J nếu tồn tại $x \in X$ sao cho $J'(x) = 0$ và $J(x) = c$.

Tiếp theo, ta nhắc lại điều kiện compact thường gọi là điều kiện Palais-Smale được giới thiệu bởi R. Palais và S. Smale vào những năm 1960 (xem

[53]), khi đó điều kiện Palais-Smale cùng với điều kiện hình học của phiếm hàm đảm bảo sự tồn tại của các điểm tới hạn của phiếm hàm J (xem [4]).

Định nghĩa 1.3. Cho phiếm hàm $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Ta nói:

(i) Phiếm hàm J thỏa mãn điều kiện Palais-Smale, kí hiệu là (PS), nếu với bất kì dãy $\{x_n\} \subset X$ thỏa mãn

$$\{J(x_n)\} \quad \text{bị chặn và} \quad \|J'(x_n)\|_{X^*} \to 0,$$

đều có một dãy con hội tụ mạnh trong X.

(ii) Phiếm hàm J thỏa mãn điều kiện Palais-Smale tại mức c, kí hiệu là $(PS)_c$, nếu với bất kì dãy $\{x_n\} \subset X$ thỏa mãn

$$J(x_n) \to c \quad \text{và} \quad \|J'(x_n)\|_{X^*} \to 0,$$

đều có một dãy con hội tụ mạnh trong X.

Tuy nhiên, trong các áp dụng ta có thể gặp tình huống ở đó số hạng phi tuyến có dáng điệu tuyến tính hoặc trên tuyến tính tại ∞, đây là nguyên nhân dẫn tới khó khăn khi chứng tỏ tính bị chặn của các dãy Palais-Smale. Khi đó, để vượt qua khó khăn này ta thay thế điều kiện Palais-Smale bằng điều kiện compact của Cerami (xem [15, 16]) sau đây.

Định nghĩa 1.4 ([15, 16])**.** Cho phiếm hàm $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Khi đó, ta nói:

(i) Phiếm hàm J thỏa mãn điều kiện (C) nếu với bất kì dãy $\{x_n\} \subset X$ thỏa mãn

$$\{J(x_n)\} \quad \text{bị chặn và} \quad (1 + \|x_n\|_X)\|J'(x_n)\|_{X^*} \to 0,$$

thì tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ mạnh trong X.

(ii) Phiếm hàm J thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ nếu với bất kì dãy $\{x_n\} \subset X$ thỏa mãn

$$J(x_n) \to c \quad \text{và} \quad (1 + \|x_n\|_X)\|J'(x_n)\|_{X^*} \to 0,$$

thì tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ mạnh trong X.

Khi đó, dưới điều kiện compact $(C)_c$, ta sẽ sử dụng phiên bản sau của Định lí qua núi (Mountain Pass Theorem).

Định lí 1.1 ([15, 16])**.** *Cho X là một không gian Banach và phiếm hàm $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với bất kì $c \in \mathbb{R}, J(0) = 0$, và*

(i) tồn tại các hằng số $\rho, \alpha > 0$ sao cho $J(u) \geq \alpha \quad \forall \|u\| = \rho$;

(ii) tồn tại điểm $u_1 \in X, \|u_1\| > \rho$ sao cho $J(u_1) \leq 0$.

Khi đó $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(t)) \geq \alpha$ là một giá trị tới hạn của J, ở đó

$$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}.$$

Do X là một không gian Banach phản xạ, khi đó ta biết rằng tồn tại dãy $\{e_j\} \subset X, \{\varphi_j\} \subset X^*$ sao cho

(i) $\langle \varphi_j, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, trong đó $\delta_{i,j} = 1$ nếu $i = j$ và $\delta_{i,j} = 0$ nếu trái lại;

(ii) $\overline{\operatorname{span}}\{e_j\}_{j=1}^{\infty} = X$ và $\overline{\operatorname{span}}^{w^*}\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} = X^*$.

Ta đặt $X_j = \mathbb{R}e_j$ thì $X = \overline{\bigoplus_{j \geq 1} X_j}$. Đặt

$$Y_k = \bigoplus_{j=1}^{k} X_j \qquad Z_k = \overline{\bigoplus_{j \geq k} X_j}. \tag{1.5}$$

Vì Định lí qua núi vẫn còn đúng khi các phiếm hàm thỏa mãn điều kiện Cerami $(C)_c$ nên để thiết lập các kết quả về tính đa nghiệm cho trường hợp phương trình trong Chương 2, ta sẽ sử dụng định lí sau của Bartsch.

Định lí 1.2. ([74, Định lí 3.6, tr.58]) *Giả sử rằng phiếm hàm* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *thỏa mãn điều kiện* $(C)_c$ *với mọi* $c \in \mathbb{R}$ *và* $J(u) = J(-u)$. *Nếu với mọi* $k \in \mathbb{N}$, *tồn tại* $\rho_k > r_k$ *sao cho*

(i) $a_k = \max\limits_{\substack{u \in Y_k \\ \|u\| = \rho_k}} J(u) \leq 0$;

(ii) $b_k = \inf\limits_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\| = r_k}} J(u) \to +\infty, k \to \infty$;

thì phiếm hàm J *có một dãy các điểm tới hạn* $\{u_k\}$ *sao cho* $J(u_k) \to +\infty$.

Nhận xét 1.2. Trong [74, Định lí 3.6, tr.58], Định lí 1.2 được phát biểu dưới điều kiện Palais-Smale. Tuy nhiên, vì Định lí biến dạng (Deformation Theorem) vẫn còn đúng dưới điều kiện Cerami, do đó Định lí 1.2 vẫn đúng dưới điều kiện Cerami.

Tiếp theo, cùng với các không gian hàm được định nghĩa ở mục trước, ta nhắc lại một số khái niệm để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của hệ Hamilton trong Chương 3.

Định nghĩa 1.5 ([9])**.** Cho E là một không gian Hilbert và một phiếm hàm $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$. Giả sử cho trước một dãy các không gian con hữu hạn chiều $\mathcal{F} = (E_n)$ của không gian E sao cho $E_n \subset E_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$ và

$$\overline{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} = E.$$

Khi đó, ta nói rằng:

i) một dãy $(z_k) \subset E$ với $z_k \in E_{n_k}, n_k \to \infty$, là một dãy $(PS)_c^{\mathcal{F}}$ nếu

$$\Phi(z_k) \to c \text{ và } (1 + \|z_k\|)(\Phi'|_{E_{n_k}})(z_k) \to 0;$$

ii) phiếm hàm Φ thỏa mãn điều kiện $(PS)_c^{\mathcal{F}}$ tại mức $c \in \mathbb{R}$, nếu mọi dãy $(PS)_c^{\mathcal{F}}$ có một dãy con hội tụ tới một điểm tới hạn của Φ.

Để chứng minh sự tồn tại của một dãy vô hạn các nghiệm yếu cho hệ Hamilton trong Chương 3, chúng tôi sẽ sử dụng định lí sau được thiết lập bởi Bartsch và de Figueiredo trong [9].

Ta phân tích không gian Hilbert E thành tổng trực tiếp $E = E^+ \oplus E^-$, kí hiệu $E_1^\pm \subset E_2^\pm \subset \cdots$ là dãy tăng các không gian con hữu hạn chiều tương ứng của $E^\pm$ sao cho $\overline{\cup_{n=1}^\infty E_n^\pm} = E^\pm$ và đặt $E_n = E_n^+ \oplus E_n^-, n = 1, 2, \ldots$.

Định lí 1.3 ([9])**.** *Giả sử phiếm hàm $\Phi : E \to \mathbb{R}$ thuộc $C^1(E, \mathbb{R})$ và thỏa mãn các điều kiện sau:*

(Φ1) *Φ thỏa mãn $(PS)_c^{\mathcal{F}}$, với $\mathcal{F} = (E_n), n = 1, 2, \ldots$ và $c > 0$;*

(Φ2) *Tồn tại một dãy $r_k > 0, k = 1, 2, \ldots,$ sao cho với $k \geq 2$ nào đó,*

$$b_k := \inf\{\Phi(z) : z \in E^+, z \perp E_{k-1}, \|z\| = r_k\} \to +\infty \text{ khi } k \to \infty;$$

(Φ3) *Tồn tại một dãy các phép đồng phôi $T_k : E \to E, k = 1, 2, \ldots,$ với $T_k(E_n) = E_n$ với mọi k và n, và tồn tại một dãy $R_k > 0, k = 1, 2, \ldots,$ sao cho, với $z = z^+ + z^- \in E_k^+ \oplus E^-$ và $R_k = \max\{\|z^+\|, \|z^-\|\}$ ta có*

$$\|T_k z\| > r_k \text{ và } \Phi(T_k z) < 0$$

ở đó r_k là dãy xuất hiện trong điều kiện (Φ2)*;*

(Φ4) $d_k := \sup\{\Phi(T_k(z^+ + z^-)) : z^+ \in E_k^+, z^- \in E^-, \|z^+\|, \|z^-\| \leq R_k\} < +\infty$;

(Φ5) *Φ là phiếm hàm chẵn, tức là $\Phi(z) = \Phi(-z)$.*

Khi đó phiếm hàm Φ có một dãy không bị chặn các giá trị tới hạn.

Lưu ý rằng, như đã được chỉ ra trong [9] nếu phiếm hàm Φ ánh xạ các tập bị chặn trong E thành các tập bị chặn trong $\mathbb{R}$ thì điều kiện (Φ4) được thỏa mãn.

1.4. Một số điều kiện tiêu chuẩn trên số hạng phi tuyến

Trong mục này chúng tôi trình bày một số điều kiện tiêu chuẩn về số hạng phi tuyến $f(x,s)$ và một số kết quả liên quan khi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1).

Trước tiên ta xét bài toán (1) với số hạng phi tuyến $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Không gian xét bài toán (1) là không gian $H_0^1(\Omega)$, ta biết rằng để thành phần thứ hai trong phiếm hàm Euler-Lagrange liên kết J, tức là $\int_\Omega F(x,u)$ (xem phần Mở đầu) xác định trên $H_0^1(\Omega)$ thì ta phải áp đặt hàm f thỏa mãn điều kiện tăng trưởng kiểu đa thức

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad s \in \mathbb{R}, 1 < p \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} (= \infty \text{ nếu } N = 2).$$

Điều này kéo theo nguyên hàm $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$ phải thỏa mãn

$$|F(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^p, \quad s \in \mathbb{R}, 1 < p \leq 2^*.$$

Khi đó, nhờ phép nhúng Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), 1 < p \leq 2^*$, ta có thể kết luận được thành phần thứ hai của phiếm hàm J là xác định trên $H_0^1(\Omega)$ và do đó J là phiếm hàm khả vi liên tục trên $H_0^1(\Omega)$.

a) Trường hợp tăng trưởng dưới tới hạn

Trong trường hợp này, khi áp dụng phương pháp biến phân để tìm các điểm tới hạn của phiếm hàm J, điều quan trọng là ta phải kiểm tra xem khi nào các dãy Palais-Smale có dãy con hội tụ. Để thực hiện điều này, ta cần một số điều kiện tiêu chuẩn đặt trên số hạng phi tuyến f:

- *Điều kiện tăng trưởng kiểu (SCP).*

  Ta nói f có tăng trưởng đa thức dưới tới hạn (SCP), nếu tồn tại các hằng số $c_1, c_2 > 0$ sao cho

$$(SCP) \quad |f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad 1 < p < 2^*.$$

  Điều kiện này cùng với điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz

(AR) $\exists R_0 > 0, \theta > 2$ sao cho

$$0 < \theta F(x,s) \leq sf(x,s), \quad \forall |s| \geq R_0, \forall x \in \Omega,$$

và phép nhúng compact $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, cho phép ta có thể sử dụng phiên bản cổ điển định lí qua núi của Ambrosetti và Rabinowitz [4] để tìm các điểm tới hạn của phiếm hàm J (xem thêm, chẳng hạn các cuốn chuyên khảo [5, tr.75-138], [37, 59, tr.1-158], [74, tr.1-68] và các tài liệu tham khảo trong đó).

- *Điều kiện tăng trưởng kiểu (SCPI).*

Lưu ý rằng, từ điều kiện (SCP), ta suy ra điều kiện (SCPI) yếu hơn

$$\text{(SCPI)} \qquad \lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0 \quad \text{đều theo } x \in \overline{\Omega},$$

ở đó ta không còn phép nhúng compact $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Hơn nữa, từ điều kiện (AR) kéo theo điều kiện yếu hơn (xem [50])

$$F(x,s) \geq c_3|s|^\theta - c_4, \quad c_3, c_4 > 0, x \in \Omega, s \in \mathbb{R}, \theta > 2,$$

và điều kiện này kéo theo điều kiện

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \infty \quad \text{đều theo } x \in \Omega.$$

Khi đó, sử dụng điều kiện này và điều kiện (SCPI), Liu và Wang [44] nghiên cứu bài toán (1) và đã loại bỏ đi điều kiện (AR) trên số hạng phi tuyến. Ngoài ra, có một số điều kiện khác cũng được áp đặt trên số hạng phi tuyến $f(x,s)$ và nguyên hàm $F(x,s)$ để loại bỏ đi điều kiện (AR) khi nghiên cứu bài toán (1), về các kết quả đó có thể xem trong [40, 41, 43] (xem thêm bài báo tổng quan [26] về các kết quả tương ứng trong trường hợp hệ phương trình).

b) Trường hợp tăng trưởng tới hạn

Nếu ta xét bài toán (1) với số hạng phi tuyến có tăng trưởng đa thức tới hạn, tức là

$$\text{(CP)} \qquad f(x, s) = |s|^{2^*-1}, \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

thì có hiện tượng thú vị sau xuất hiện: trước tiên nhờ sử dụng đẳng thức tích phân kiểu Pohozaev [55], thì bài toán (1) không có nghiệm không tầm thường nếu Ω là miền hình sao (kết quả vẫn đúng trong trường hợp trên tới hạn, tức là $p > 2^* - 1$). Tuy nhiên, trong trường hợp miền bị chặn Brezis và Nirenberg [13] xét bài toán (1) với số hạng phi tuyến có tăng trưởng tới hạn và có thêm một nhiễu bậc thấp hơn (tức là, $f(x, s) = s^{2^*-1} + g(x, s)$ với $\lim_{s\to+\infty} g(x, s)/s^{2^*-1} = 0$) thì bài toán (1) có nghiệm (xem thêm các kết quả trong trường hợp hệ phương trình có tăng trưởng tới hạn trong [1, 26]).

Chương 2

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC SUY BIẾN NỬA TUYẾN TÍNH

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán elliptic suy biến nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ở đó số hạng phi tuyến có tăng trưởng dưới tới hạn và không thỏa mãn điều kiện Ambrosetti-Rabinowitz. Chúng tôi sẽ chứng tỏ sự tồn tại của ít nhất một nghiệm yếu và khi thêm điều kiện về tính lẻ của số hạng phi tuyến thì chúng tôi chứng minh được tính đa nghiệm yếu của bài toán.

Nội dung của chương này được viết dựa trên bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan tới luận án.

2.1. Đặt bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán elliptic suy biến nửa tuyến tính sau trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$,

$$\begin{cases} -\Delta_\lambda u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó số hạng phi tuyến $f(x,u)$ có tăng trưởng dưới tới hạn và thỏa mãn các giả thiết sau:

$(f1)$ $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và $f(x,0) = 0$ với mọi $x \in \overline{\Omega}$;

$(f2)$ $\lim\limits_{|u|\to+\infty} \dfrac{F(x,u)}{u^2} = +\infty$ đều theo $x \in \overline{\Omega}$, trong đó $F(x,u) = \int\limits_0^u f(x,s)ds$;

$(f3)$ $\limsup\limits_{|u|\to 0} \dfrac{2F(x,u)}{|u|^2} < \mu_1$ đều theo $x \in \overline{\Omega}$, trong đó μ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\lambda$ với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;

$(f4)$ Tồn tại các hằng số $C_* \geq 0$ và $\theta \geq 1$ sao cho

$$H(x,t) \leq \theta H(x,s) + C_* \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, 0 < |t| < |s|, \forall x \in \Omega,$$

với $H(x,u) = \dfrac{1}{2} u f(x,u) - F(x,u)$;

(SCPI) f có tăng trưởng đa thức dưới tới hạn Ω, tức là

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{2^*_\lambda - 1}} = 0,\ 2^*_\lambda = \frac{2Q}{Q-2},\ Q > 2$$

ở đó Q là kí hiệu của số chiều thuần nhất của $\mathbb{R}^N$ ứng với nhóm co dãn $\{\delta_t\}_{t>0}$.

Nhận xét 2.1. Trong bài toán (2.1) chúng tôi không yêu cầu số hạng phi tuyến f thỏa mãn điều kiện (AR), tức là

(AR) $\quad \exists R_0 > 0, \theta > 2$ sao cho

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s), \quad \forall |s| \geq R_0, \forall x \in \Omega.$$

Một ví dụ về hàm f thỏa mãn các điều kiện $(f1) - (f4)$ và (SCPI) ở trên nhưng không thỏa mãn điều kiện (AR) là hàm

$$f(x,s) = s \log(1 + |s|).$$

Bây giờ chúng tôi so sánh các điều kiện của chúng tôi với các điều kiện trước đó. Vì điều kiện (AR) kéo theo điều kiện yếu hơn

$$F(x,s) \geq c|s|^\theta - d \quad c, d > 0,\ x \in \Omega, s > 0, \theta > 2, \tag{2.2}$$

và điều kiện (2.2) này kéo theo điều kiện yếu hơn $(f2)$. Hơn nữa, điều kiện $(f2)$ là hệ quả của tính trên tuyến tính của f tại ∞, tức là

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s} = +\infty.$$

Điều kiện này thường được sử dụng trong nhiều nghiên cứu, hơn nữa, điều kiện $(f4)$ là yếu hơn điều kiện sau được sử dụng trong [50]:

$$\text{Tồn tại } s_0 > 0 \text{ sao cho } \frac{f(x,s)}{s} \text{ là tăng theo } s \geq s_0, \forall x \in \Omega.$$

Để thay thế điều kiện (AR) trên số hạng phi tuyến với tăng trưởng đa thức, trong [75] các tác giả sử dụng giả thiết

$$\begin{aligned}
&H(x,s) \text{ tăng theo } s, \quad \forall x \in \Omega, \quad sf(x,s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R},\\
&sf(x,s) \geq C_0|s|^{\mu}, \quad \forall |s| \geq s_0 > 0, \forall x \in \Omega,
\end{aligned}$$

ở đó $\mu > 2$ và $C_0 > 0$ để thay thế điều kiện (AR), rõ ràng, điều kiện này là mạnh hơn điều kiện của chúng tôi. Mặt khác, trong [62], Schechter và Zou giả thiết rằng

$$H(x,s) \text{ lồi theo } s, \quad x \in \Omega,$$

hay tồn tại các hằng số $C > 0, \mu > 2$ và $r \geq 0$ sao cho

$$\mu F(x,t) - tf(x,t) \leq C(1+t^2), \quad |t| \geq r.$$

Như đã được chú ý trong [50], điều kiện này thực tế là tương đương với điều kiện (AR), và rõ ràng điều kiện dựa trên tính lồi của hàm H là mạnh hơn điều kiện $(f4)$ của chúng tôi. Thật vậy, vì $H(x,s)$ là hàm tựa đơn điệu theo $s < 0$ và $s > 0$, hay là một hàm lồi trên $\mathbb{R}$ thì H thỏa mãn điều kiện $(f4)$ với $\theta = 1$. Như vậy, các điều kiện trên số hạng phi tuyến ở đây là mở rộng cho các kết quả tương ứng trước đó trong [39] khi điều kiện (AR) không được áp đặt trên số hạng phi tuyến và cải tiến, mở rộng các kết quả cho trường hợp toán tử Laplace trong [44, 50] tới trường hợp tăng trưởng (SCPI).

Tiếp theo, ta định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (2.1).

Định nghĩa 2.1. Một hàm $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$ được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (2.1) nếu

$$\int\limits_{\Omega} \nabla_\lambda u \nabla_\lambda \varphi \, dx = \int\limits_{\Omega} f(x,u)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (2.1), ta sử dụng phương pháp biến phân. Trước hết, ta định nghĩa phiếm hàm Euler-Lagrange liên kết với bài toán (2.1) như sau

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_\lambda u|^2 dx - \int\limits_\Omega F(x,u)dx,$$

trong đó $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$. Nhờ các giả thiết đặt trên f, ta có thể thấy rằng J_λ là xác định trên không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ và $J_\lambda \in C^1(\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega), \mathbb{R})$ với đạo hàm xác định bởi

$$J'_\lambda(u)v = \int\limits_\Omega \nabla_\lambda u \nabla_\lambda v dx - \int\limits_\Omega f(x,u)v dx, \quad \forall\, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega).$$

Khi đó, các điểm tới hạn của J_λ là các nghiệm yếu của phương trình (2.1), và do đó ta có thể sử dụng Định lí qua núi 1.1 để chứng tỏ sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (2.1).

2.2. Sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường

Nội dung của mục này là chứng minh sự tồn tại của ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường của bài toán (2.1).

Định lí 2.1. *Giả sử rằng f có tăng trưởng đa thức dưới tới hạn trên miền Ω, tức là điều kiện (SCPI) đúng, và f thỏa mãn các điều kiện $(f1) - (f4)$. Khi đó bài toán* (2.1) *có nghiệm yếu không tầm thường.*

Ta sẽ chứng minh Định lí 2.1 bằng cách kiểm tra tất cả các điều kiện của Định lí 1.1 được thỏa mãn. Trước tiên ta kiểm tra điều kiện (i) qua bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2.1. *Giả sử f thỏa mãn các điều kiện $(f1), (f3)$ và $(SCPI)$. Khi đó tồn tại các hằng số $\alpha, \rho > 0$ sao cho*

$$J_\lambda(u) \geq \alpha \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega), \|u\|_{1,2} = \rho.$$

Chứng minh. Từ các điều kiện $(f3)$ và $(SCPI)$, ta thấy rằng tồn tại các hằng số $C, \mu > 0$ sao cho

$$F(x,s) \leq \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu)|s|^2 + C|s|^{2^*_\lambda} \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Nhờ Mệnh đề 1.1, ta có

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{1,2} - \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu)\int\limits_\Omega u^2 dx - C\int\limits_\Omega |u|^{2^*_\lambda} dx \\ &\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1})\|u\|^2_{1,2} - C\|u\|^{2^*_\lambda}_{L^{2^*_\lambda}}. \end{aligned}$$

Vì $\mu > 0$ và $2 < 2^*_\lambda$, nên ta có thể chọn $\alpha, \rho > 0$ sao cho $J_\lambda(u) \geq \alpha$ khi $\|u\|^2_{1,2} = \rho$. □

Tiếp theo ta kiểm tra điều kiện (ii) trong Định lí 1.1.

Bổ đề 2.2. *Giả sử rằng hàm f thỏa mãn điều kiện $(f2)$. Khi đó $J_\lambda(tu) \to -\infty$ khi $t \to +\infty$ với mọi $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \setminus \{0\}$.*

Chứng minh. Với bất kì $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \setminus \{0\}$, với mọi $M \geq \dfrac{\|u\|^2_{1,2}}{2\|u\|^2_{L^2}} > 0$ tồn tại hằng số $A > 0$ sao cho

$$F(x,s) \geq M|s|^2 - A \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Thật vậy, bởi $(f2)$ nên tồn tại hằng số $\delta > 0$ sao cho

$$F(x,s) \geq M|s|^2 \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \text{ với } |s| > \delta. \tag{2.4}$$

Hơn nữa, từ tính liên tục của hàm F, ta có

$$F(x,t) \geq m = \min_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[-\delta,\delta]} F(x,s) \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \text{ với } |s| \leq \delta. \qquad (2.5)$$

Vì $F(x,0) = 0$ với bất kì $x \in \overline{\Omega}$, do đó $m \leq 0$. Từ (2.4) và (2.5) ta thu được (2.3). Do đó

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu) &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|_{1,2}^2 - \int_\Omega (Mt^2u^2 - A)dx \\ &= t^2\left(\frac{\|u\|_{1,2}^2}{2} - M\|u\|_{L^2}^2\right) + A|\Omega|, \end{aligned}$$

trong đó $|\Omega|$ kí hiệu là độ đo Lebesgue của Ω. Cho $t \to +\infty$ ta thu được $J_\lambda(tu) \to -\infty$. Vì vậy, nếu ta chọn $u_1 = tu$ với t đủ lớn ta sẽ có $J_\lambda(u_1) < 0$, do đó điều kiện (ii) trong Định lí 1.1 được thỏa mãn. □

Bây giờ ta chứng minh điều kiện $(C)_c$ được thỏa mãn.

Bổ đề 2.3. *Nếu các điều kiện $(f1) - (f4)$ và (SCPI) được thỏa mãn, thì J_λ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$.*

Chứng minh. Giả sử $\{u_n\}$ là một dãy trong $\overset{\circ}{W}{}_{\lambda}^{1,2}(\Omega)$ sao cho

$$(1 + \|u_n\|_{1,2})\|J'_\lambda(u_n)\| \to 0 \quad \text{ và } \quad J_\lambda(u_n) \to c,$$

điều này tương đương với

$$(1 + \|u_n\|_{1,2}) \sup_{\|\phi\|_{1,2}=1} |\langle J'_\lambda(u_n), \phi\rangle| \to 0, \qquad (2.6)$$

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_{1,2}^2 - \int_\Omega F(x,u_n)dx \to c, \qquad (2.7)$$

khi $n \to \infty$.

Trước tiên, bằng phương pháp phản chứng ta sẽ chứng tỏ rằng dãy $\{u_n\}$ là bị chặn trong không gian $\overset{\circ}{W}{}_{\lambda}^{1,2}(\Omega)$. Thật vậy, giả sử trái lại rằng dãy $\{u_n\}$

không bị chặn, nghĩa là

$$\|u_n\|_{1,2} \to +\infty.$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{1,2}},$$

thì dãy $\{v_n\}$ là bị chặn vì $\|v_n\|_{1,2} = 1$, do đó ta có thể trích ra một dãy con vẫn kí hiệu là $\{v_n\}$ sao cho $v_n \rightharpoonup v$ trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$. Vì Ω là bị chặn, nên từ Mệnh đề 1.1 ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} v_n(x) &\to v(x) \quad && \text{h.k.n trong } \Omega, \\ v_n &\to v && \text{trong } L^q(\Omega),\ \forall 1 \le q < 2^*_\lambda. \end{aligned}$$

Ta sẽ xét hai trường hợp riêng biệt khi $v \equiv 0$ và $v \not\equiv 0$.

Trường hợp 1. Nếu $v \equiv 0$ thì với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại $t_n \in [0,1]$ sao cho

$$J_\lambda(t_n u_n) = \max_{0 \le t \le 1} J_\lambda(t u_n). \tag{2.8}$$

Khi đó, với mọi $R > 0$, nhờ điều kiện $(SCPI)$, tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$F(x,s) \le C|s| + \frac{|s|^{2^*_\lambda}}{R^{2^*_\lambda}} \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Vì $\dfrac{R}{\|u_n\|_{1,2}} \in [0,1]$ với n đủ lớn, nên ta có

$$J_\lambda(t_n u_n) = \max_{0 \le t \le 1} J_\lambda(t u_n) \ge J_\lambda\Big(\frac{R}{\|u_n\|_{1,2}} u_n\Big) = J_\lambda(R v_n). \tag{2.10}$$

Hơn nữa, theo (2.9) và $\|v_n\|_{1,2} = 1$, ta thu được

$$\begin{aligned} J_\lambda(R v_n) &= \frac{1}{2}\|R v_n\|^2_{1,2} - \int\limits_\Omega F(x, R v_n(x))dx \\ &\ge \frac{1}{2}R^2 - C\int\limits_\Omega |R v_n(x)|dx - \int\limits_\Omega \frac{|R v_n(x)|^{2^*_\lambda}}{R^{2^*_\lambda}}dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}R^2 - CR\int\limits_{\Omega} |v_n(x)|dx - \int\limits_{\Omega} |v_n(x)|^{2^*_\lambda}dx. \tag{2.11}$$

Do $v_n \rightharpoonup v \equiv 0$ trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$, khi đó $\int\limits_{\Omega} |v_n(x)|dx \to 0$ và $\int\limits_{\Omega} |v_n(x)|^{2^*_\lambda}dx < C(\Omega)$. Vì vậy, trước tiên ta cho $n \to +\infty$ trong (2.11), và sau đó cho $R \to +\infty$ và sử dụng (2.10), ta suy ra

$$J_\lambda(t_nu_n) \to +\infty \text{ khi } n \to +\infty. \tag{2.12}$$

Hơn nữa, vì $J_\lambda(0) = 0$, ta có thể giả sử rằng $t_n \in (0, 1)$ và theo (2.8) ta có

$$\frac{d}{dt}(J_\lambda(tu_n))|_{t=t_n} = 0.$$

Từ đó ta thu được

$$\langle J'_\lambda(t_nu_n), t_nu_n\rangle = t_n\frac{d}{dt}(J_\lambda(tu_n))|_{t=t_n} = 0. \tag{2.13}$$

Mặt khác, từ (2.13) và điều kiện $(f4)$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}J_\lambda(t_nu_n) &= \frac{1}{\theta}[J_\lambda(t_nu_n) - \frac{1}{2}\langle J'_\lambda(t_nu_n), t_nu_n\rangle] \\
&= \frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega}[\frac{1}{2}f(x, t_nu_n)t_nu_n - F(x, t_nu_n)]dx \\
&= \frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega} H(x, t_nu_n(x))dx \\
&= \frac{1}{\theta}\int\limits_{\Omega}[\theta H(x, u_n(x)) + C_*]dx \\
&= J_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}\langle J'_\lambda(u_n), u_n\rangle + \frac{C_*}{\theta}|\Omega| \\
&\to c + \frac{C_*}{\theta}|\Omega| = C.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã chứng tỏ rằng với một hằng số $C > 0$ phù hợp

$$\limsup_{n\to+\infty} J_\lambda(t_nu_n) \le C$$

điều này mâu thuẫn với (2.12). Do đó, trường hợp $v \equiv 0$ không thể xảy ra.

Trường hợp 2. Nếu $v \not\equiv 0$, thì khi đó tập hợp $\Omega_{\neq} = \{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}$ có độ đo Lebesgue dương, và từ định nghĩa của v_n ta có

$$|u_n(x)| \to +\infty \text{ h.k.n trong } \Omega_{\neq}$$

khi $n \to +\infty$.

Từ (2.7) và $\|u_n\|_{1,2} \to +\infty$, ta suy ra rằng

$$\frac{J_\lambda(u_n)}{\|u_n\|_{1,2}^2} \to 0.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{1}{2} - \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\neq}} \frac{F(x, u_n(x))}{\|u_n\|_{1,2}^2} dx - \int\limits_{\Omega_{\neq}} \frac{F(x, u_n(x))}{\|u_n\|_{1,2}^2} dx \to 0 \tag{2.14}$$

khi $n \to +\infty$. Ta đánh giá hai tích phân

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\neq}} \frac{F(x, u_n(x))}{\|u_n\|_{1,2}^2} dx \quad \text{và} \quad \int\limits_{\Omega_{\neq}} \frac{F(x, u_n(x))}{\|u_n\|_{1,2}^2} dx.$$

Ta có

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_{1,2} v_n(x) = +\infty.$$

Nhờ điều kiện $(f2)$, ta thu được

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F(x, u_n(x))}{|u_n(x)|^2} = +\infty \text{ h.k.n trong } \Omega_{\neq}.$$

Từ đó

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F(x, u_n(x))}{|u_n(x)|^2} |v_n(x)|^2 = +\infty \text{ h.k.n trong } \Omega_{\neq}.$$

Điều này kéo theo

$$\int\limits_{\Omega_{\neq}} \frac{F(x, u_n(x))}{\|u_n\|_{1,2}^2} dx \to +\infty \quad \text{khi } n \to +\infty. \tag{2.15}$$

Bây giờ ta sẽ chứng tỏ với hằng số $K > 0$ nào đó, tích phân

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\neq}} \frac{F(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{1,2}^2}dx \geq -\frac{K}{\|u_n\|_{1,2}^2}|\Omega \setminus \Omega_{\neq}|. \tag{2.16}$$

Thật vậy, từ điều kiện $(f2)$ ta có

$$\lim_{|s|\to+\infty} F(x,s) = +\infty \text{ đều theo } x \in \overline{\Omega}.$$

Từ đó, tồn tại các số $\bar{s}, M > 0$ sao cho

$$F(x,s) \geq M \text{ với bất kì } x \in \overline{\Omega} \text{ và } |s| > \bar{s}. \tag{2.17}$$

Vì F liên tục trên tập $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, nên ta có

$$F(x,s) \geq \min_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[-\bar{s},\bar{s}]} F(x,s). \tag{2.18}$$

Từ giả thiết $F(x,0) = 0$ kéo theo $\min\limits_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[-\bar{s},\bar{s}]} F(x,s) \leq 0$ với bất kì $x \in \overline{\Omega}$. Do đó, từ (2.17) và (2.18) ta suy ra rằng

$$F(x,s) \geq -K \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Từ đây ta thu được bất đẳng thức (2.16).

Hơn nữa, từ giả thiết $\|u_n\|_{1,2}^2 \to +\infty$ và (2.16) ta đạt được

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\neq}} \frac{F(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{1,2}^2}dx \geq 0 \quad \text{ khi } n \to +\infty. \tag{2.19}$$

Do đó, từ (2.14), (2.15) và (2.19) ta có

$$\frac{J_\lambda(u_n)}{\|u_n\|_{1,2}^2} \to -\infty$$

điều này là mâu thuẫn.

Như vậy, nhờ các chứng minh trên, ta kết luận được dãy $\{u_n\}$ là bị chặn trong $\overset{\circ}{W}{}_{\lambda}^{1,2}(\Omega)$.

Do đó, từ các kết quả ở trên, không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{trong } \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega);\\ u_n &\to u \quad \text{h.k.n trong } \Omega;\\ u_n &\to u \quad \text{trong } L^q(\Omega), 1 \le q < 2^*_{\lambda}. \end{aligned}$$

Vì f có tăng trưởng dưới tới hạn trên Ω, nên với bất kì $\epsilon > 0$ tồn tại hằng số $C(\epsilon) > 0$ sao cho

$$f(x,s) \le C(\epsilon) + \epsilon |s|^{2^*_{\lambda}-1} \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Vì vậy, ta có

$$\begin{aligned} \Big|\int\limits_{\Omega} f(x,u_n)(u_n-u)dx\Big| &\le C(\epsilon)\int\limits_{\Omega} |u_n-u|dx + \epsilon \int\limits_{\Omega} |u_n-u|.|u_n|^{2^*_{\lambda}-1}dx\\ &\le C(\epsilon)\int\limits_{\Omega} |u_n-u|dx + \epsilon\Big(\int\limits_{\Omega} |u_n|^{2^*_{\lambda}}dx\Big)^{\frac{2^*_{\lambda}-1}{2^*_{\lambda}}}\Big(\int\limits_{\Omega} |u_n-u|^{2^*_{\lambda}}dx\Big)^{\frac{1}{2^*_{\lambda}}}\\ &\le C(\epsilon)\int\limits_{\Omega} |u_n-u|dx + \epsilon C(\Omega). \end{aligned}$$

Vì $u_n \rightharpoonup u$ trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$, $\int\limits_{\Omega} |u_n-u|dx \to 0$, và $\epsilon > 0$ là tùy ý, nên ta được

$$\int\limits_{\Omega} f(x,u_n)(u_n-u)dx \to 0.$$

Do đó

$$\int\limits_{\Omega} [f(x,u_n)-f(x,u)](u_n-u)dx \to 0 \quad \text{khi } n \to +\infty. \tag{2.20}$$

Hơn nữa, từ (2.6) ta suy ra

$$\langle J'_{\lambda}(u_n) - J'_{\lambda}(u), u_n - u\rangle \to 0. \tag{2.21}$$

Nhờ (2.20) và (2.21), ta thu được

$$\int_{\Omega} |\nabla_\lambda u_n - \nabla_\lambda u|^2 dx \to 0.$$

Do đó, ta kết luận được rằng $u_n \to u$ mạnh trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$, điều này có nghĩa là phiếm hàm J_λ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$. □

Chứng minh của Định lí 2.1. Kết hợp các Bổ đề 2.1, 2.2 và 2.3, ta thấy rằng tất cả các điều kiện của Định lí 1.1 được thỏa mãn. Do đó, phương trình (2.1) có nghiệm yếu không tầm thường. Định lí 2.1 được chứng minh. □

2.3. Tính đa nghiệm của nghiệm yếu

Trong mục này, ta sẽ sử dụng Định lí 1.2 và điều kiện (SCPI) được thay thế bởi điều kiện (SCP) dưới đây trên số hạng phi tuyến, đồng thời áp dụng giả thiết $f(x,s)$ là hàm lẻ theo biến s, chúng ta sẽ chứng minh kết quả về sự tồn tại của vô hạn nghiệm yếu của bài toán (2.1).

Định lí 2.2. *Giả sử rằng các điều kiện $(f1)-(f4)$ được thỏa mãn và*

(1) tồn tại các hằng số $a, b > 0$ và $q \in (2, 2^*_\lambda)$ sao cho

(SCP) $$|f(x,s)| \le a + b|s|^{q-1} \quad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

(2) $f(x,-s) = -f(x,s)$, với mọi $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Khi đó bài toán (2.1) *có một dãy các nghiệm yếu $\{u_n\}$ sao cho $J_\lambda(u_n) \to +\infty$ khi $n \to \infty$.*

Nhận xét 2.2. Ta lưu ý rằng điều kiện (SCP) là mạnh hơn điều kiện $(SCPI)$, vì vậy nếu f thỏa mãn điều kiện (SCP) thì ta thu được sự tồn tại của ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường của phương trình (2.1) theo Định lí 2.1.

Ta biết rằng $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$ là một không gian Hilbert, nên ta định nghĩa các không gian con Y_k, Z_k như trong (1.5). Vì $f(x,-s) = -f(x,s)$, nên $J_\lambda(-u) = J_\lambda(u)$ và nhờ Bổ đề 2.3, phiếm hàm J_λ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$. Do đó, để chứng minh Định lí 2.2, trước tiên ta cần chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 2.4. *Nếu* $1 \le q < 2^*_\lambda$, *thì*

$$\beta_k = \sup_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_{1,2}=1}} \|u\|_{L^q} \to 0 \quad \textit{khi } k \to \infty.$$

Chứng minh. Rõ ràng rằng $\{\beta_k\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới vì $0 < \beta_{k+1} \le \beta_k$, do đó $\beta_k \to \beta \ge 0$ khi $k \to \infty$. Với mỗi $k \ge 0$, tồn tại $u_k \in Z_k$ sao cho $\|u_k\|_{1,2} = 1$ và $\|u_k\|_{L^q} > \beta_k/2$.

Vì $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$ là một không gian Hilbert, nên tồn tại $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$ sao cho (qua một dãy con)

$$u_k \rightharpoonup u \text{ trong } \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega).$$

Nghĩa là,

$$(u_k, \varphi) \to (u, \varphi) \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega).$$

Hơn nữa, vì $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$, trong đó dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ gồm các hàm riêng của toán tử $-\Delta_\lambda$ là một cơ sở trực giao của $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$, nên ta có

$$(u, \varphi) = \lim_{k \to +\infty} (u_k, \varphi) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_j (u_k, \varphi_j) = 0.$$

Do đó, ta thu được

$$u_k \rightharpoonup 0 \text{ trong } \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega).$$

Áp dụng Mệnh đề 1.1, ta suy ra rằng $u_k \to 0$ trong $L^q(\Omega)$. Do đó, ta đã chứng tỏ được rằng $\beta = 0$. $\square$

Chứng minh của Định lí 2.2. Để chứng minh Định lí 2.2, ta chỉ cần kiểm tra các điều kiện (i) và (ii) của Định lí 1.2.

Bây giờ, giả sử rằng với $k \geq 0$ cho trước nào đó, từ điều kiện $(f2)$ và sử dụng các lí luận như chứng minh (2.3), ta suy ra tồn tại các hằng số $C_k > 0, A_k$ sao cho

$$F(x,s) \geq C_k|s|^2 - A_k \quad \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Mặt khác, vì Y_k là không gian hữu hạn chiều, nên mọi chuẩn trên Y_k là tương đương, vì vậy, với bất kì $u \in Y_k$ tồn tại các hằng số $C_k, \bar{C}_k > 0$ sao cho

$$\sqrt{\bar{C}_k}\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{1,2} \leq \sqrt{C_k}\|u\|_{L^2}.$$

Từ đó, với bất kì $u \in Y_k$ ta thu được

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2 - \int_\Omega F(x,u(x))dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2 - C_k\|u\|_{L^2}^2 + A_k|\Omega| \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2 - \|u\|_{1,2}^2 + A_k|\Omega| \\ &= -\frac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2 + A_k|\Omega|. \end{aligned}$$

Do đó, với $\|u\|_{1,2}^2 = \rho_k > 0$ đủ lớn, ta thu được

$$J_\lambda(u) \leq 0.$$

Điều này chứng tỏ phiếm hàm J_λ thỏa mãn điều kiện (i) của Định lí 1.2.

Với điều kiện (ii), từ giả thiết (SCP) ta suy ra, tồn tại hằng số $C_2 > 0$ sao cho

$$|F(x,s)| \leq C_2(1 + |s|^q).$$

Ta đặt

$$\beta_k = \sup_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\|_{1,2}=1}} \|u\|_{L^q},$$

khi đó trên Z_k ta có

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\geq \frac{\|u\|_{1,2}^2}{2} - C_2\|u\|_{L^q}^q - C_2|\Omega| \\
&= \frac{\|u\|_{1,2}^2}{2} - C_2\|u\|_{L^q}^q - C_2|\Omega| \\
&= \frac{\|u\|_{1,2}^2}{2} - C_2\Big\|\frac{u}{\|u\|_{1,2}}\Big\|_{L^q}^q\|u\|_{1,2}^q - C_2|\Omega| \\
&\geq \frac{\|u\|_{1,2}^2}{2} - C_2\beta_k^q\|u\|_{1,2}^q - C_2|\Omega| \\
&= (\frac{1}{2} - C_2\beta_k^q\|u\|_{1,2}^{q-2})\|u\|_{1,2}^2 - C_2|\Omega|.
\end{aligned}$$

Ta chọn

$$r_k = (C_2 q \beta_k^q)^{-1/(q-2)}.$$

Từ Bổ đề 2.4, ta có $\beta_k \to 0$ và $q > 2$, do đó $r_k \to +\infty$ khi $k \to \infty$. Vì vậy ta suy ra rằng, nếu $u \in Z_k$ và $\|u\|_{1,2} = r_k$, thì

$$J_\lambda(u_k) \geq (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})r_k^2 - C_2|\Omega| \to +\infty$$

khi $k \to +\infty$. Điều này chứng tỏ điều kiện (ii) của Định lí 1.2 được thỏa mãn.

Định lí 2.2 được chứng minh. □

Kết luận Chương 2

Trong chương này, sử dụng phương pháp biến phân, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên Dirichlet đối với phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_λ. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của bài toán (2.1) (Định lí 2.1) nhờ sử dụng phiên bản phù hợp của Định lí qua núi;

2) Chứng minh được tính đa nghiệm của nghiệm yếu của bài toán (2.1) (Định lí 2.2) nhờ áp dụng định lí Fountain của Bartch [74, Định lí 3.6, p58].

Các kết quả này là sự bổ sung cho các kết quả trong [39] khi số hạng phi tuyến không thỏa mãn điều kiện (AR), đồng thời cũng cải tiến và mở rộng các kết quả tương ứng trong trường hợp toán tử Laplace trong [44, 50].

Chương 3

SỰ TỒN TẠI VÀ KHÔNG TỒN TẠI NGHIỆM CỦA HỆ HAMILTON SUY BIẾN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm cổ điển trong miền bị chặn kiểu hình sao và sự tồn tại một dãy vô hạn các nghiệm yếu của lớp hệ elliptic Hamilton nửa tuyến tính suy biến chứa toán tử Δ_λ trong miền bị chặn.

Nội dung của chương này được viết dựa theo bài báo [3] trong Danh mục các công trình của tác giả liên quan tới luận án.

3.1. Đặt bài toán

Xét hệ phương trình elliptic Hamilton nửa tuyến tính suy biến có dạng

$$\begin{cases} -\Delta_\lambda u &= |v|^{p-1}v, \quad x \in \Omega, \\ -\Delta_\lambda v &= |u|^{q-1}u, \quad x \in \Omega, \\ \quad u = v &= 0, \qquad\quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $p, q > 1$ và Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ với biên $\partial\Omega$ trơn.

Bây giờ ta định nghĩa các không gian hàm dùng để nghiên cứu bài toán (3.1).

Sử dụng các không gian hàm $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ và $W^{2,2}_\lambda(\Omega)$ như ở Chương 1, ta xét toán tử

$$A : W^{2,2}_\lambda(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

trong đó $A = -\Delta_\lambda$, với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất. Ta kí hiệu không gian $E^s = (D(A^s))$ với $s > 0$ với tích vô hướng

$$(u, v)_{E^s} = \int_\Omega A^s u \, A^s v \, dx \quad u, v \in E^s,$$

trong đó

$$D(A^s) = \{\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j, \ a_j \in \mathbb{R} | \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{2s} a_j^2 < +\infty\} \text{ và } A^s \varphi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j^s \varphi_j,$$

ở đó φ_j là hàm riêng của toán tử A ứng với giá trị riêng $\mu_j, j = 1, 2, \ldots$.

Từ Mệnh đề 1.2 và định lí nội suy, ta có kết quả về phép nhúng quan trọng sau.

Bổ đề 3.1. *Giả sử $Q > 4$. Khi đó, các phép nhúng*

$$E^s \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega) \text{ và } E^t \hookrightarrow L^{p+1}$$

là liên tục nếu $\frac{1}{q+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{2s}{Q}$ và $\frac{1}{p+1} \geq \frac{1}{2} - \frac{2t}{Q}$. Hơn nữa, các phép nhúng đó là compact nếu các bất đẳng thức này là ngặt.

Chứng minh. Từ kết quả về phép nhúng trong Mệnh đề 1.2 và do $\frac{2Q}{Q-4} > 2$, ta suy ra

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^{\frac{2Q}{Q-4}}}$$

và

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{W_\lambda^{2,2}}.$$

Mặt khác, bởi Mệnh đề 1.1 và $\frac{2Q}{Q-2} > 2$

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}}.$$

Do đó,

$$\|u\|_{L^2} \leq C \max\{\|u\|_{W_\lambda^{2,2}}, \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}}\} = C\|u\|_{D(A)}.$$

Từ đó, nhờ định lí nội suy ta có phép nhúng

$$E^s = [D(A), \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)]_s \hookrightarrow [L^2(\Omega), L^{2^*_\lambda}(\Omega)]_s = L^{q+1},$$

là liên tục với

$$\frac{1}{q+1} = \frac{1-s}{2} + \frac{2s}{2^*_\lambda}.$$

Hơn nữa, phép nhúng này là compact nếu

$$\frac{1}{q+1} > \frac{1-s}{2} + \frac{2s}{2^*_\lambda} = \frac{1}{2} - \frac{2s}{Q}.$$

Như vậy, phát biểu thứ nhất được chứng minh. Phát biểu thứ hai của bổ đề được chứng minh tương tự. □

Bây giờ, với $s, t \geq 0$ và $s + t = 1$, ta đặt $E = E^s \times E^t$, khi đó E là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(z, \eta)_E = (u, \varphi)_{E^s} + (v, \psi)_{E^t} \text{ với } z = (u, v),\ \eta = (\varphi, \psi) \in E.$$

Ta xét dạng song tuyến tính

$$B((u, v), (\varphi, \psi)) = \int_\Omega (A^s u A^t \psi + A^s \varphi A^t v)\, dx.$$

Khi đó ta thấy B là dạng song tuyến tính đối xứng, liên tục và do đó tồn tại toán tử tuyến tính bị chặn tự liên hợp $L : E \to E$ sao cho

$$B(z, \eta) = (Lz, \eta) \text{ với mọi } z, \eta \in E.$$

Ta định nghĩa dạng toàn phương $P : E \to \mathbb{R}$ bởi

$$P(z) = \frac{1}{2}(Lz, z)_E = \int_\Omega A^s u A^t v\, dx, \quad \forall z = (u, v) \in E.$$

Tương tự như trong [28], ta có thể chứng tỏ được toán tử L chỉ có hai giá trị riêng là ± 1, và các không gian riêng tương ứng E^+ và E^- là

$$E^+ = \{(u, A^{s-t}u) \,|\, u \in E^s\} \text{ và } E^+ = \{(u, -A^{s-t}u) \,|\, u \in E^s\}.$$

Với $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn của E^s, và vì vậy $(A^{s-t}e_j)_{j=1}^{\infty}$ cũng là cơ sở trực chuẩn của E^t. Ta kí hiệu

$$E_n^s := \operatorname{span}\{e_j : j = 1, \dots, n\} \text{ và } E_n^t := \operatorname{span}\{A^{s-t}e_j : j = 1, \dots, n\}.$$

Khi đó, ta có thể kiểm tra được rằng E được biểu diễn dưới dạng tổng trực tiếp $E = E^+ \oplus E^-, E_n = E_n^+ \oplus E_n^- = E_n^s \times E_n^t$, và

$$\overline{\cup_{n=1}^{\infty} E_n^+} = E^+, \quad \overline{\cup_{n=1}^{\infty} E_n^-} = E^-.$$

Do đó, với mỗi $z = z^+ + z^- \in E = E^+ \oplus E^-$, ta có $z^+ = (u, A^{s-t}u)$ và $z^- = (u, -A^{s-t}u)$. Từ điều này ta suy ra

$$B(z^+, z^-) = 0 \quad \forall z^+ \in E^+, z^- \in E^-$$

và

$$P(z^+) - P(z^-) = \frac{1}{2}\|z\|_E^2.$$

Bây giờ, ta định nghĩa phiếm hàm năng lượng $\Phi : E = E^s \times E^t \to \mathbb{R}$ liên kết với bài toán (3.1) bởi

$$\Phi(z) = P(z) - \int\limits_{\Omega} H(u, v)dx,$$

trong đó $H(u, v)$ là hàm Hamilton xác định bởi

$$H(u, v) = \frac{|v|^{p+1}}{p+1} + \frac{|u|^{q+1}}{q+1}.$$

Khi đó phiếm hàm Φ xác định trên E và $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ với đạo hàm

$$\Phi'(u, v)(\phi, \psi) = \int\limits_{\Omega} (A^s u\, A^t \psi + A^t v\, A^s \phi)dx - \int\limits_{\Omega} (u^q \phi + v^p \psi)dx.$$

Ta thấy rằng, mỗi điểm tới hạn của phiếm hàm Φ là một nghiệm yếu của bài toán (3.1) theo nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1. Ta nói rằng $z = (u, v) \in E = E^s \times E^t$ là một nghiệm yếu của bài toán (3.1) nếu

$$\begin{aligned} \int_\Omega A^s u\, A^t \psi\, dx - \int_\Omega v^p \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in E^t, \\ \int_\Omega A^t v\, A^s \phi dx - \int_\Omega u^q \phi\, dx = 0 \quad \forall \phi \in E^s. \end{aligned}$$

3.2. Sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương

Trong mục này, ta sẽ chứng minh kết quả về sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương của hệ (3.1) khi miền Ω là miền δ_t-hình sao.

Trước tiên, ta đồng nhất toán tử vi phân cấp một

$$T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad T(x) = T(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

với trường vectơ T xác định bởi

$$T := \sum_{i=1}^N \epsilon_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{3.2}$$

và trường vectơ này là phần tử sinh của nhóm co dãn $\{\delta_t\}_{t>0}$ theo nghĩa, một hàm u là δ_t-thuần nhất bậc m nếu và chỉ nếu $Tu = mu$.

Định nghĩa 3.2 ([39])**.** Một miền Ω được gọi là δ_t-hình sao theo điểm gốc nếu điểm gốc $0 \in \Omega$ và $\langle T, \nu \rangle \geq 0$ tại mỗi điểm của $\partial\Omega$, trong đó $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ là vectơ pháp tuyến ngoài của Ω và kí hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong $\mathbb{R}^N$.

Ta kí hiệu $\Lambda^2(\overline{\Omega})$ là không gian tuyến tính gồm tất cả các hàm $u \in C(\overline{\Omega})$ sao cho $X_j u$ và $X_j^2 u$ với $j = 1, \ldots, N$ tồn tại trong Ω và có thể được mở rộng liên tục tới $\overline{\Omega}$, ở đây $X_j := \lambda_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Để chứng tỏ được sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương của hệ (3.1), trước tiên chúng tôi thiết lập đẳng thức tích phân kiểu Pohozaev phù hợp cho hệ phương trình (3.1) qua bổ đề sau.

Bổ đề 3.2. *Với bất kì $u, v \in A^2(\overline{\Omega})$, ta có*

$$\int_{\Omega} [T(u)\Delta_\lambda v + T(v)\Delta_\lambda u]\, dx = \int_{\partial\Omega} [T(u)\langle \nabla_\lambda v, \nu_\lambda\rangle + T(v)\langle \nabla_\lambda u, \nu_\lambda\rangle] dS$$
$$- \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle \langle T, \nu\rangle dS + (Q-2)\int_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle dx, \tag{3.3}$$

ở đó T là trường vectơ trong (3.2), ν là vectơ pháp tuyến ngoài của Ω và

$$\nu_\lambda = (\lambda_1 \nu_1, \ldots, \lambda_N \nu_N), \quad \nabla_\lambda = (\lambda_1 \partial_{x_1}, \ldots, \lambda_N \partial_{x_N}).$$

Chứng minh. Từ phương trình thứ hai trong hệ (3.1), ta nhân cả hai vế với $T(u)$, lấy tích phân trên Ω, và sử dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_{\Omega} T(u)\Delta_\lambda v\, dx = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j} \nu_j dS - \int_{\Omega} \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx$$
$$= I_1 + I_2, \tag{3.4}$$

trong đó

$$I_1 = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j} \nu_j dS = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \langle \nabla_\lambda, \nu_\lambda\rangle dS$$
$$= \int_{\partial\Omega} T(u)\langle \nabla_\lambda, \nu_\lambda\rangle\, dS, \tag{3.5}$$

và

$$I_2 = -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j} \left(\epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \left[\delta_{ij}\epsilon_i \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \epsilon_i x_i \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \right] dx$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} \epsilon_j \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx - \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \epsilon_i x_i \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}\, dx$$

$$= I_{2,1} + I_{2,2}. \tag{3.6}$$

Lấy tích phân từng phần $I_{2,2}$, ta có

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \epsilon_i x_i \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}\, dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle \langle T, \nu\rangle dS + Q\int_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle\, dx \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}\, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} T\lambda_j^2\, dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Vì các hàm λ_j là δ_t-thuần nhất bậc $\epsilon_j - 1$, nên ta có

$$T\lambda_j^2 = 2\lambda_j T\lambda_j = 2(\epsilon_j - 1)\lambda_j^2.$$

Do đó, từ (3.7) ta có

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= -\int_{\partial\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle \langle T, \nu\rangle dS + Q\int_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle\, dx \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}\, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} 2(\epsilon_j - 1)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} \lambda_j^2\, dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle \langle T, \nu\rangle dS + (Q-2)\int_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle\, dx \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}\, dx + 2\sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} \epsilon_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} \lambda_j^2\, dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Từ (3.4)-(3.8), ta suy ra

$$\int\limits_{\Omega} T(u)\Delta_\lambda v\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} T(u)\langle \nabla_\lambda v, \nu_\lambda\rangle\, dS - \int\limits_{\partial\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle \langle T, \nu\rangle\, dS$$

$$+ (Q-2)\int\limits_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle\, dx - I_{2,1}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \epsilon_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}\, dx. \tag{3.9}$$

Bằng các tính toán hoàn toàn tương tự trên, ta cũng thu được

$$\int\limits_{\Omega} T(v)\Delta_\lambda u\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} T(v)\langle \nabla_\lambda u, \nu_\lambda\rangle\, dS - \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Omega} \epsilon_j \lambda_j^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx$$

$$- \sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega} \epsilon_i x_i \lambda_j^2 \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j}\, dx$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} T(v)\langle \nabla_\lambda u, \nu_\lambda\rangle\, dS + I_{2,1} - \sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{\Omega} \epsilon_i x_i \lambda_j^2 \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j}\, dx. \tag{3.10}$$

Kết hợp (3.9) và (3.10), ta thu được (3.3). □

Nhận xét 3.1. Ta lưu ý rằng, đẳng thức tích phân (3.3) là đẳng thức tích phân kiểu Pohozaev cho hệ (3.1). Đặc biệt, trong trường hợp $u = v$ trong (3.3), ta khôi phục lại được đẳng thức kiểu Pohozaev cho trường hợp phương trình đã được thiết lập trong [39, Định lí 2.1].

Nhờ bổ đề trên ta có kết quả sau về sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương của bài toán (3.1).

Định lí 3.1. *Giả sử $p, q > 1$ thỏa mãn*

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \le \frac{Q-2}{Q}. \tag{3.11}$$

Nếu Ω là miền bị chặn và là δ_t-hình sao theo điểm gốc, thì bài toán (3.1) *không có nghiệm cổ điển dương.*

Chứng minh. Từ hệ (3.1), ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} [T(v)\Delta_\lambda u + T(u)\Delta_\lambda v]\, dx &= -\int\limits_{\Omega} [T(v)v^p + T(u)u^q]\, dx \\
&= -\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{|v|^{p+1}}{p+1} + \frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right) \epsilon_i x_i dS + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \epsilon_i \left(\frac{|v|^{p+1}}{p+1} + \frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right) dx \\
&= Q \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|v|^{p+1}}{p+1} + \frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right) dx.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Hơn nữa, từ (3.3) và (3.12) ta suy ra

$$\begin{aligned}
Q \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|v|^{p+1}}{p+1} + \frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right) dx &= \int\limits_{\partial\Omega} [\langle \nabla_\lambda u, \nu_\lambda\rangle T(v) + \langle \nabla_\lambda v, \nu_\lambda\rangle T(u)]\, dS \\
&\quad - \int\limits_{\partial\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle \langle T, \nu\rangle dS + (Q-2) \int\limits_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle\, dx.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Mặt khác, lấy tích phân từng phần ta thu được

$$\int\limits_{\Omega} |v|^{q+1}\, dx = -\int\limits_{\Omega} v\Delta_\lambda u\, dx = \int\limits_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle\, dx, \tag{3.14}$$

và

$$\int\limits_{\Omega} |u|^{q+1}\, dx = -\int\limits_{\Omega} u\Delta_\lambda v\, dx = \int\limits_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle\, dx. \tag{3.15}$$

Do đó, ta thu được từ (3.14) và (3.15) đẳng thức tích phân sau

$$\int\limits_{\Omega} \left[(1-\theta)|u|^{q+1} + \theta|v|^{q+1}\right]\, dx = \int\limits_{\Omega} \langle \nabla_\lambda u, \nabla_\lambda v\rangle\, dx. \tag{3.16}$$

Kết hợp (3.13) và (3.16) ta có

$$Q\int\limits_{\Omega}\left(\frac{|v|^{p+1}}{p+1}+\frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right)dx-(Q-2)\int\limits_{\Omega}\left[(1-\theta)|u|^{q+1}+\theta|v|^{q+1}\right]dx$$
$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\langle\nabla_\lambda u,\nu_\lambda\rangle T(v)+\langle\nabla_\lambda v,\nu_\lambda\rangle T(u)\right]dS-\int\limits_{\partial\Omega}\langle\nabla_\lambda u,\nabla_\lambda v\rangle\langle T,\nu\rangle dS.$$

Điều này tương đương với

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{Q}{p+1}-\theta(Q-2)\right)|v|^{p+1}+\left(\frac{Q}{q+1}-(1-\theta)(Q-2)\right)|u|^{q+1}\right]dx$$
$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\langle\nabla_\lambda u,\nu_\lambda\rangle T(v)+\langle\nabla_\lambda v,\nu_\lambda\rangle T(u)\right]dS-\int\limits_{\partial\Omega}\langle\nabla_\lambda u,\nabla_\lambda v\rangle\langle T,\nu\rangle dS. \tag{3.17}$$

Mặt khác, vì $u,v\in C^1(\overline{\Omega}\setminus\Pi)$, nên từ điều kiện $u,v=0$ trên $\partial\Omega$ kéo theo $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\nu_j$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_j}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}\nu_j$ tại bất kì điểm nào của $\partial\Omega\setminus\Pi$ với mọi $j=1,\dots,N$. Do đó, trên $\partial\Omega\setminus\Pi$ ta có

$$\left[\langle\nabla_\lambda u,\nu_\lambda\rangle T(v)+\langle\nabla_\lambda v,\nu_\lambda\rangle T(u)\right]-\langle\nabla_\lambda u,\nabla_\lambda v\rangle\langle T,\nu\rangle$$
$$=\sum_{i,j=1}^{N}\left[\lambda_j^2\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j\epsilon_i x_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\lambda_j^2\frac{\partial v}{\partial x_j}\nu_j\epsilon_i x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_j^2\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\epsilon_i x_i\nu_i\right]$$
$$=\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial\nu}\frac{\partial v}{\partial\nu}\lambda_j^2\nu_j^2\epsilon_i x_i\nu_i=\frac{\partial u}{\partial\nu}\frac{\partial v}{\partial\nu}|\nu_\lambda|^2\langle T,\nu\rangle.$$

Thay đẳng thức trên vào (3.17), ta được

$$\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{Q}{p+1}-\theta(Q-2)\right)|v|^{p+1}+\left(\frac{Q}{q+1}-(1-\theta)(Q-2)\right)|u|^{q+1}\right]dx$$
$$=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\frac{\partial v}{\partial\nu}|\nu_\lambda|^2\langle T,\nu\rangle dS. \tag{3.18}$$

Chọn $\theta=\frac{Q}{(Q-2)(p+1)}$ thì $\frac{Q}{p+1}-\theta(Q-2)=0$, và từ (3.11) ta có

$$\frac{Q}{q+1}-(1-\theta)(Q-2)\leq 0.$$

Do đó, từ (3.18) ta suy ra

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu}|\nu_\lambda|^2\langle T,\nu\rangle dS \leq 0. \tag{3.19}$$

Vì Ω là miền δ_t-hình sao nên ta có $\langle T,\nu\rangle \geq 0$ trên $\partial\Omega$, và dọc theo đó $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} \leq 0$, do đó ta có

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu}|\nu_\lambda|^2\langle T,\nu\rangle dS \geq 0. \tag{3.20}$$

Như vậy, từ (3.19) và (3.20) ta thu được

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu}|\nu_\lambda|^2\langle T,\nu\rangle dS = 0$$

tại bất kì điểm nào của $\partial\Omega$.

Nếu

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < \frac{Q-2}{Q}$$

thì

$$\frac{Q}{q+1} - (1-\theta)(Q-2) < 0$$

và từ (3.18), ta có $u \equiv 0$ và do đó $v \equiv 0$.

Nếu

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{Q-2}{Q}$$

thì

$$\frac{Q}{q+1} - (1-\theta)(Q-2) = 0.$$

Khi đó, vì $\langle T,\nu\rangle \neq 0$ trên $\partial\Omega$, nên $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ hoặc $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ tại một điểm nào đó của $\partial\Omega$. Hơn nữa, $-\Delta_\lambda u$, $-\Delta_\lambda v$, u, $v \geq 0$ trong Ω và $u = v = 0$ trên $\partial\Omega$. Điều này kéo theo $u \equiv 0$ hoặc $v \equiv 0$, từ đó $u \equiv v \equiv 0$.

Chứng minh của Định lí 3.1 được hoàn thành.

$\square$

3.3. Sự tồn tại của một dãy vô hạn nghiệm yếu

Trong mục này chúng ta chứng minh sự tồn tại của một dãy vô hạn các nghiệm yếu của bài toán (3.1).

Định lí 3.2. *Nếu $p, q > 1$, và miền Ω là trơn và bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ và*

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{Q-2}{Q}, \tag{3.21}$$

thì bài toán (3.1) *có một dãy vô hạn các nghiệm yếu.*

Chứng minh. Trước hết, ta để ý rằng $H(-u, -v) = H(u, v)$ với mọi $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ với

$$H(u, v) = \frac{|v|^{p+1}}{p+1} + \frac{|u|^{q+1}}{q+1},$$

nên phiếm hàm $\Phi(u, v)$ là phiếm hàm chẵn, do đó điều kiện $(\Phi 5)$ được thỏa mãn. Ta sẽ kiểm tra các điều kiện $(\Phi 1)$-$(\Phi 4)$ của Định lí 1.3, và chứng minh được chia làm bốn bước.

Bước 1: Kiểm tra điều kiện $(\Phi 1)$. Nhờ sử dụng Chú ý 2.1 trong [9], ta chỉ cần chứng tỏ một $(PS)_c^{\mathcal{F}}$-dãy trong E là dãy bị chặn. Điều này được chứng tỏ qua bổ đề sau.

Bổ đề 3.3. *Nếu $\{z_j\}$ là một $(PS)_c^{\mathcal{F}}$-dãy trong E, thì $\{z_j\}$ là dãy bị chặn trong E.*

Chứng minh. Vì $\{z_j\} \subset E$ là một $(PS)_c^{\mathcal{F}}$-dãy, nên ta có

$$(1 + \|z_j\|_E) \sup_{\|\eta\|_E = 1} |\langle \Phi'_{E_{n_j}}(z_j), \eta \rangle| \to 0,$$
$$\int_\Omega A^s u_j A^t v_j - \int_\Omega \left(\frac{|u_j|^{q+1}}{q+1} + \frac{|v_j|^{p+1}}{p+1} \right) dx \to c.$$

Ta chứng tỏ dãy $\{z_j\}$ bị chặn bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử trái lại dãy $\{z_j\}$ là không bị chặn, tức là

$$\|z_j\|_E \to +\infty.$$

Với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$, ta đặt

$$w_j = \frac{z_j}{\|z_j\|_E} = (w_j^1, w_j^2)$$

thì $\{w_j\}$ là dãy bị chặn vì $\|w_j\|_E = 1$. Vì vậy, ta có thể trích ra được một dãy con mà ta vẫn kí hiệu là $\{w_j\}$ sao cho $w_j \rightharpoonup w$ trong E. Điều này kéo theo

$$\begin{cases} w_j^1(x) \rightharpoonup w^1(x) \quad \text{trong } E^s,\ w_j^2(x) \rightharpoonup w^2(x) \quad \text{trong } E^t, \\ w_j^1(x) \to w^1(x),\ w_j^2(x) \to w^2(x) \quad \text{h.k.n trong } \Omega \\ w_j^1 \to w^1 \quad \text{trong } L^{q+1}, w_j^2 \to w^2 \quad \text{trong } L^{p+1}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Ta sẽ xét hai trường hợp tách biệt là $w \equiv 0$ và $w \not\equiv 0$.

Trường hợp 1. Nếu $w \equiv 0$ thì với bất kì $j \in \mathbb{N}^*$, do $\Phi(tz_j)$ là liên tục theo $t \in [0, 1]$, nên tồn tại $t_j \in [0, 1]$ sao cho

$$\Phi(t_j z_j) = \max_{0 \le t \le 1} \Phi(tz_j). \tag{3.23}$$

Do $\Phi(0) = 0$, ta có thể giả sử rằng $t_j \in (0, 1)$ và nhờ (3.23) ta thu được

$$\frac{d}{dt}(\Phi(tz_j))|_{t=t_j} = 0.$$

Do đó

$$\Phi|'_{E_{n_j}}(t_j z_j)(t_j z_j) = t_j \frac{d}{dt}(\Phi(tz_j))|_{t=t_j} = 0.$$

Từ điều này ta có

$$\Phi(t_j z_j) = \Phi(t_j z_j) - \frac{1}{2}\Phi|'_{E_{n_j}}(t_j z_j)(t_j z_j)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_\Omega \left(\frac{|t_j u_j|}{\|z_j\|}\right)^{q+1} dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega \left(\frac{|t_j v_j|}{\|z_j\|}\right)^{p+1} dx$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_\Omega \left(\frac{|u_j|}{\|z_j\|}\right)^{q+1} dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega \left(\frac{|v_j|}{\|z_j\|}\right)^{p+1} dx$$

$$= \Phi(z_j) - \frac{1}{2}\Phi|'_{E_{n_j}}(z_j)(z_j) \to c < +\infty. \tag{3.24}$$

Mặt khác, ta chọn $t = \dfrac{R}{\|z_j\|} \in [0,1]$ với mọi $R > 0$, từ (3.23) ta có

$$\Phi(t_j z_j) = \max_{0 \leq t \leq 1} \Phi(t u_j) \geq \Phi(\frac{R}{\|z_j\|} z_j) = \Phi(R w_j).$$

Vì $\|w_j\| = 1$ và $z_j = (u_j, u_j)$, nên $w_j = \dfrac{1}{\|z_j\|_E}(u_j, u_j) = (\theta_j, \theta_j) \in E^s \times E^s$, ở đó $\theta_j = \dfrac{u_j}{\|z_j\|_E}$ và bởi (3.22) ta có $\theta_j \to 0$ trong L^{q+1}. Do đó,

$$\Phi(R w_j) = R^2 - \int_\Omega \left(\frac{\theta_j^{q+1}}{q+1} + \frac{\theta_j^{p+1}}{p+1}\right) dx,$$

cho $j \to +\infty$ và sau đó cho $R \to +\infty$ ta thu được

$$\Phi(R w_j) \to +\infty,$$

điều này mâu thuẫn với (3.24). Do đó, trường hợp $w \equiv 0$ không thể xảy ra.

Trường hợp 2. Giả sử rằng $w \not\equiv 0$, khi đó tập hợp $\Omega_{\neq} = \{x \in \Omega : w(x) \neq 0\}$ có độ đo Lebesgue dương. Ta có

$$w_j(x) = \frac{z_j(x)}{\|z_j\|_E} \to w(x) \text{ trong } \Omega_{\neq} \text{ khi } j \to \infty.$$

Vì $\|z_j\|_E \to +\infty$, nên

$$|z_j(x)| \to +\infty \text{ h.k.n trong } \Omega_{\neq} \text{ và } \frac{\Phi(z_j)}{\|z_j\|_E^2} \to 0.$$

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử rằng

$$|u_j(x)| \to +\infty \text{ h.k.n trong } \Omega_{\neq}.$$

Từ đó,

$$\frac{|u_j|^{q+1}}{|u_j(x)|^2} \to +\infty \text{ h.k.n trong } \Omega_{\neq},$$

điều này tương đương với

$$\frac{|u_j|^{q+1}}{|u_j(x)|^2}|w_j^1(x)|^2 \to +\infty \text{ h.k.n trong } \Omega_{\neq}.$$

Vì $|u_j|^{q+1}$ liên tục trên $\overline{\Omega}$ nên tồn tại hằng số C sao cho với bất kì $x \in \overline{\Omega}$,

$$|u_j|^{q+1}(x) \geq C.$$

Vì vậy,

$$\frac{|u_j|^{q+1}(x)}{\|z_j\|_E^2} \geq \frac{C}{\|z_j\|_E^2}.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{|u_j|^{q+1}(x)}{\|u_j(x)\|^2}|w_j^1(x)|^2 \geq \frac{C}{\|z_j\|_E^2}.$$

Nhờ (3.6), ta có

$$\int\limits_\Omega A^s w_j^1 A^t w_j^2 dx - \frac{1}{\|z_j\|_E^2}\int\limits_\Omega \left(\frac{|u_j|^{q+1}}{q+1} + \frac{|v_j|^{p+1}}{p+1}\right) dx \to 0.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|w_j\|^2 = \frac{1}{2}(\|w_j^1\|_{E^s}^2 + \|w_j^2\|_{E^t}^2) &\geq \int\limits_\Omega A^s w_j^1 A^t w_j^2 dx \\
&= \frac{1}{\|z_j\|_E^2}\int\limits_\Omega \left(\frac{|u_j|^{q+1}}{q+1} + \frac{|v_j|^{p+1}}{p+1}\right) dx \\
&\geq \frac{1}{\|z_j\|_E^2}\int\limits_\Omega \frac{|u_j|^{q+1}}{q+1} dx.
\end{aligned}$$

Vì $|\Omega_{\neq}| \neq 0$, nên

$$
\begin{aligned}
+\infty &= \int\limits_{\Omega_{\neq}} \liminf_{j\to\infty} \frac{|u_j|^{q+1}}{|u_j(x)|^2}|w_j^1(x)|^2 dx - \int\limits_{\Omega_{\neq}} \limsup_{j\to\infty} \frac{C}{\|z_j\|_E^2} dx \\
&= \int\limits_{\Omega_{\neq}} \liminf_{j\to\infty} \left(\frac{|u_j|^{q+1}}{|u_j(x)|^2}|w_j^1(x)|^2 dx - \frac{C}{\|z_j\|_E^2}\right) dx \\
&\le \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega_{\neq}} \left(\frac{|u_j|^{q+1}}{|u_j(x)|^2}|w_j^1(x)|^2 dx - \frac{C}{\|z_j\|_E^2}\right) dx \\
&\le \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|u_j|^{q+1}}{|u_j(x)|^2}|w_j^1(x)|^2 dx - \frac{C}{\|z_j\|_E^2}\right) dx \\
&= \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{|u_j|^{q+1}}{|u_j(x)|^2}|w_j^1(x)|^2 dx - \lim_{j\to\infty} \frac{C}{\|z_j\|_E^2} dx \\
&\le \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

điều này là vô lí.

Vậy dãy $\{z_j\}$ bị chặn trong E, hay điều kiện $(\Phi 1)$ được thỏa mãn. $\square$

Bước 2: Kiểm tra điều kiện $(\Phi 2)$. Ta khẳng định rằng, nếu $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ và (3.21) được thỏa mãn, thì tồn tại một dãy $r_k > 0, k = 1, 2, \ldots,$ sao cho với $k \ge 2$ nào đó, ta có

$$
b_k := \inf\{\Phi(z) : z \in E^+, z \perp E_{k-1}, \|z\| = r_k\} \to +\infty \text{ khi } k \to \infty. \quad (3.25)
$$

Thật vậy, với bất kì $z = (u, v) \in E$, ta có

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} H(u,v) dx &= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{q+1}|u|^{q+1} + \frac{1}{p+1}|v|^{p+1}\right) dx \\
&\le C(\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1} + \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} + 1) \\
&\le C(\|u\|_{L^{q+1}}^{r} + \|v\|_{L^{p+1}}^{r} + 1), \quad r = \max\{p+1, q+1\} > 2 \\
&= C(\|z\|_{L^{q+1}\times L^{p+1}}^{r} + 1).
\end{aligned}
$$

Ta chứng tỏ rằng

$$\mu_k := \sup\{\|z\|_{L^{q+1}\times L^{p+1}} : z \in E, z \perp E_{k-1}, \|z\|_E = 1\} \to 0 \text{ khi } k \to \infty. \tag{3.26}$$

Thật vậy, vì $0 < \mu_{k+1} \le \mu_k$, tức là $\{\mu_k\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới, vì vậy tồn tại $\mu \ge 0$ sao cho

$$\mu_k \to \mu \ge 0 \text{ khi } k \to \infty.$$

Mặt khác, với mỗi $k \ge 0$ tồn tại $z_j \in E$ sao cho $z_j \perp E_{k_j-1}, \|z_j\| = 1$ và

$$\|z_j\|_{L^{q+1}\times L^{p+1}} > \frac{\mu_k}{2}.$$

Vì E là không gian Hilbert, nên tồn tại $z \in E$ và tồn tại dãy con mà ta vẫn kí hiệu là $\{z_j\}$ sao cho

$$z_j \rightharpoonup z \text{ trong } E,$$

nghĩa là

$$(z_j, \eta)_E \to (z, \eta)_E \quad \forall \eta \in E.$$

Hơn nữa, với $\eta = (\phi, \psi) \in E = E^s \times E^t$, ta có

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \text{ và } \psi = \sum_{j=1}^{\infty} d_j A^{s-t} e_j.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}(z, \eta)_E &= \lim_{j\to\infty} (z_j, \eta)_E = \lim_{j\to\infty} [(u_j, \phi)_{E^s} + (v_j, \psi)_{E^t}] \\ &= \lim_{j\to\infty} (z_j, \eta)_E \left[\sum_{k=1}^{\infty} c_k (u_j, e_k) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k (v_j, A^{s-t} e_k)\right] = 0.\end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$z_j \rightharpoonup 0 \text{ trong } E,$$

và do phép nhúng $E \hookrightarrow L^{q+1} \times L^{p+1}$ là compact, nên ta có

$$z_j \to 0 \text{ trong } E.$$

Do đó, ta thu được $\mu = 0$, tức là $\mu_k \to 0$ khi $k \to \infty$. Vì vậy (3.26) được chứng minh.

Tiếp theo, với $z \in E^+, z \perp E_{k-1}$, ta có

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{1}{2}\|z\|_E^2 - \int\limits_\Omega \left(\frac{|u|^{q+1}}{q+1} + \frac{|v|^{p+1}}{p+1} \right) dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|z\|_E^2 - C(\|z\|^r_{L^{q+1}\times L^{p+1}} + 1) \\
&= \frac{1}{2}\|z\|_E^2 - C \left\| \frac{z}{\|z\|_E} \right\|^r_{L^{q+1}\times L^{p+1}} \|z\|_E^r - C \\
&\geq \frac{1}{2}\|z\|_E^2 - C\mu_k^r \|z\|_E^r - C \\
&= \left(\frac{1}{2} - C\mu_k^r \|z\|_E^{r-2} \right) \|z\|_E^2 - C.
\end{aligned}$$

Chọn $\|z\| = r_k$ với $r_k = (Cr\mu_k^r)^{-1/(r-2)} > 0, k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\Phi(z) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) r_k^2 - C \to +\infty.$$

Do đó, ta thu được (3.25) như đã khẳng định ở trên, và điều này chứng tỏ điều kiện ($\Phi2$) trong Định lí 1.3 được thỏa mãn.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện ($\Phi3$).

Ta chứng tỏ rằng, tồn tại một dãy $\alpha_k > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, sao cho ($\Phi3$) được thỏa mãn với $T_k := T_{\alpha_k}$ và $R_k := \alpha_k$.

Thật vậy, với mỗi $\alpha > 0$, ta xét toán tử $T_\alpha : E \to E$ là một đẳng cấu xác định bởi $T_\alpha = (\alpha^p u, \alpha^q v)$. Ta thấy rằng, $T_\alpha E_n = E_n, \forall n = 1, 2, \ldots.$

Trước tiên, với $z = z^+ + z^- \in E_k^+ \oplus E^-$, ta kí hiệu $z^- = z_1^- + z_2^-$ trong đó $z_1^- \in E_k^-, z_2^- \perp E_k^-$ và $\bar{z} = z^+ + z_1^-$, $z = (u, v)$ và $z^\pm = (u^\pm, v^\pm)$. Khi đó ta có $u_2^- \perp \bar{u}$ trong L^2, và từ đó, sử dụng bất đẳng thức Hölder và do Ω là miền bị chặn và $q+1, p+1 > 2$, ta có

$$\|\bar{u}\|_{L^2}^2 = |(u, \bar{u})_{L^2}| \leq \|u\|_{L^2}\|\bar{u}\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^{q+1}}\|\bar{u}\|_{L^{p+1}}. \tag{3.27}$$

Bây giờ, với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, vì E_k^s, E_k^t là các không gian con hữu hạn chiều, nên mọi chuẩn trên E_k^s, E_k^t đều tương đương, vì vậy tồn tại các hằng số dương $\sigma_k, \sigma_k', \tau_k, \tau_k'$ sao cho

$$\|u\|_{L^2} \geq \sigma_k \|u\|_{E^s}, \quad \|u\|_{E^s} \geq \sigma_k' \|u\|_{L^{p+1}} \quad \forall u \in E_k^s, \tag{3.28}$$

và

$$\|v\|_{L^2} \geq \tau_k \|v\|_{E^t}, \quad \|v\|_{E^t} \geq \tau_k' \|v\|_{L^{q+1}} \quad \forall v \in E_k^t. \tag{3.29}$$

Sử dụng (3.27), (3.28) và (3.29), ta thu được

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{q+1}} &\geq \|\bar{u}\|_{L^2}^2 \|\bar{u}\|_{L^{p+1}}^{-1} \geq \sigma_k^2 \|\bar{u}\|_{E^s}^2 \|\bar{u}\|_{L^{p+1}}^{-1} \\ &\geq \sigma_k^2 \sigma_k' \|\bar{u}\|_{E^s}^2 \|\bar{u}\|_{E^s}^{-1} = \bar{\sigma}_k \|\bar{u}\|_{E^s}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

và

$$\|v\|_{L^{p+1}} \geq \bar{\tau}_k \|\bar{v}\|_{E^t}, \tag{3.31}$$

trong đó $\bar{\sigma}_k = \sigma_k^2 \sigma_k'$ và $\bar{\tau}_k = \tau_k^2 \tau_k'$.

Với $\bar{u} = u^+ + u_1^-$ và $\bar{v} = A^{s-t}(u^+ - u_1^-)$, ta có $\|\bar{u}\|_{E^s} = \|u^+ + u_1^-\|_{E^s}$ và

$$\|\bar{v}\|_{E^t} = \|A^t A^{s-t}(u^+ - u_1^-)\|_{L^2} = \|A^s(u^+ - u_1^-)\|_{L^2} = \|u^+ - u_1^-\|_{E^s}.$$

Theo định nghĩa của hàm Hamilton $H(u, v)$ và bởi (3.30), (3.31), với mọi $\alpha > 0$ ta có

$$\int_\Omega H(T_\alpha z)dx = \int_\Omega H(\alpha^p u, \alpha^q v)dx$$

$$\geq \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{q+1}\alpha^{p(q+1)}|u|^{q+1} + \frac{1}{p+1}\alpha^{q(p+1)}|v|^{p+1} \right) dx$$

$$\geq c(\alpha^{p(q+1)}\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}} + \alpha^{q(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}})$$

$$\geq c\big(\alpha^{p(q+1)}\bar{\sigma}_k^{q+1}\|\bar{u}\|^{q+1}_{E^s} + \alpha^{q(p+1)}\bar{\tau}_k^{p+1}\|\bar{v}\|^{p+1}_{E^t}\big). \qquad (3.32)$$

Vì $\|u^+\|_{E^s} = \dfrac{1}{2}\|z^+\|_{E^+} = \dfrac{\alpha}{2}$, ta thấy chỉ xảy ra một trong hai bất đẳng thức

$$\|u^+ + u_1^-\|_{E^s} \geq \frac{\alpha}{2} \text{ hoặc } \|u^+ - u_1^-\|_{E^s} \geq \frac{\alpha}{2}. \qquad (3.33)$$

Nhờ (3.32) và (3.33),

$$\int\limits_\Omega H(\alpha^p u, \alpha^q v)dx \geq c\delta_k \alpha^{(p+1)(q+1)},$$

trong đó

$$\delta_k = \min\left\{ \left(\frac{\sigma_k^2\sigma_k'}{2}\right)^{q+1}, \left(\frac{\tau_k^2\tau_k'}{2}\right)^{p+1} \right\}.$$

Mặt khác,

$$P(T_\alpha z) = \int\limits_\Omega A^s(\alpha^p u)A^t(\alpha^q v)dx = \alpha^{q+p}P(z)$$

$$= \alpha^{q+p}\frac{1}{2}\|z\|_E^2 = \frac{1}{2}\alpha^{q+p}(\|z^+\|^2_{E^+} - \|z^-\|^2_{E^-}). \qquad (3.34)$$

Do đó, với $\|z^+\|_{E^+} = \alpha$, ta thu được

$$P(T_\alpha z) \leq \frac{1}{2}\alpha^{q+p+2}. \qquad (3.35)$$

Vì

$$\Phi(T_\alpha z) = P(T_\alpha z) - \int\limits_\Omega H(T_\alpha z)\, dx,$$

nên từ (3.34) và (3.35), ta suy ra

$$\Phi(T_\alpha z) \leq \frac{1}{2}\alpha^{q+p+2} - \delta_k\alpha^{(q+1)(p+1)}.$$

Vì $p, q > 1$ nên $(q+1)(p+1) > q+p+2$, do đó, tồn tại một số $\alpha_0(k) > 0$ sao cho với mọi $\alpha_k > \alpha_0(k)$ ta có $\Phi(T_{\alpha_k}) < 0$. Hơn nữa, ta cũng thu được

$$\|T_\alpha z\|_E = \int_\Omega A^s(\alpha^p u)A^t(\alpha^q v)dx = \alpha^{p+q}\|z\|_E^2 \geq \alpha^{\min\{p,q\}}\|z\|_E^2.$$

Điều này kéo theo với $\alpha_k = \max\{\|z^+\|_{E^+}^2, \|z^-\|_{E^-}^2\}$

$$\|T_{\alpha_k} z\|_E \geq \alpha_k^{\min\{p,q\}}(\|z^+\|_{E^+}^2 - \|z^-\|_{E^-}^2) \geq \alpha_k^{\min\{p,q\}+2} \quad \forall \alpha_k > \alpha_0(k).$$

Vì vậy, ta có thể chọn α_k để thu được

$$\Phi(T_{\alpha_k} z) < 0 \text{ và } \|T_{\alpha_k} z\|_E \geq r_k,$$

với $r_k > 0$ cho trước.

Như vậy, điều kiện $(\Phi3)$ trong Định lí 1.3 được thỏa mãn.

Bước 4: Kiểm tra điều kiện $(\Phi4)$.

Cho U là tập con bất kì bị chặn của E, nghĩa là

$$\|(u,v)\|_{E^s\times E^t}^2 = \|u\|_{E^s}^2 + \|v\|_{E^t}^2 \leq C, \quad \forall (u,v) \in U.$$

Khi đó

$$\|u\|_{E^s} \leq C \quad \text{và} \quad \|v\|_{E^t} \leq C, \quad \forall (u,v) \in U.$$

Ta có

$$\begin{aligned}|\Phi(u,v)| &\leq \int_\Omega |A^s u\, A^t v|\, dx + \int_\Omega \left(\frac{|v|^{q+1}}{p+1} + \frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right) dx \\ &\leq \|A^s u\|_{L^2}\|A^t v|_{L^2} + \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{1}{q+1}\|u\|_{L^{q+1}}^{q+1}.\end{aligned}$$

Do $\|A^s u\|_{L^2} = \|u\|_{E^s}, \|A^s v\|_{L^2} = \|v\|_{E^t}$ và do các phép nhúng $E^s \hookrightarrow L^{q+1}$ và $E^t \hookrightarrow L^{p+1}$ là compact, nên ta có

$$|\Phi(u,v)| \leq \|u\|_{E^s}\|v\|_{E^t} + c(\|u|_{E^s}^{q+1} + \|v|_{E^t}^{p+1}).$$

Điều này chứng tỏ điều kiện ($\Phi 4$) được thỏa mãn.

Chứng minh của Định lí 3.2 được hoàn thành. $\square$

Kết luận Chương 3

Chương này nghiên cứu một lớp hệ elliptic nửa tuyến tính dạng Hamilton chứa toán tử suy biến mạnh trên miền Ω bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^N, N \geq 3$. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh được sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương của bài toán khi Ω là miền δ_t-hình sao (Định lí 3.1). Phương pháp được sử dụng là thiết lập đồng nhất thức tích phân Pohozaev phù hợp và khai thác cấu trúc hình học của miền đang xét;

2) Chứng minh được sự tồn tại một dãy vô hạn các nghiệm yếu của bài toán (3.1) (Định lí 3.2). Phương pháp sử dụng ở đây là sử dụng phương pháp biến phân và Định lí Fountain cho trường hợp hệ phương trình được thiết lập bởi Bartsch và Figueiredo trong [9].

Các kết quả ở chương này là sự mở rộng các kết quả tương ứng trước đó cho toán tử Laplace trong [9, 36, 47, 54, 72].

Chương 4

ĐỊNH LÍ KIỂU LIOUVILLE CHO HỆ BẤT ĐẲNG THỨC ELLIPTIC SUY BIẾN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu các định lí kiểu Liouville, tức là các kết quả về sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương, cho bất đẳng thức và hệ bất đẳng thức elliptic suy biến chứa toán tử Δ_λ trong toàn không gian $\mathbb{R}^N, N \geq 2$.

Các kết quả của chương này được viết dựa trên công trình [2] trong Danh mục các công trình của tác giả liên quan tới luận án.

4.1. Đặt bài toán

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu hệ bất đẳng thức elliptic suy biến có dạng

$$\begin{cases} -\Delta_\lambda u \geq v^p, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_\lambda v \geq u^q, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4.1}$$

ở đó $p, q > 0$. Chúng tôi sẽ thiết lập các định lí Liouville trong hai trường hợp sau:

- **Trường hợp 1.** Các số mũ $p, q > 1$ và thỏa mãn điều kiện

  $$\max\left\{\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right\} \geq Q - 2.$$

  Để thực hiện điều này (xem chứng minh Định lí 4.1 và hệ quả của nó là Hệ quả 4.1 ở mục 4.2), chúng tôi sử dụng phương pháp đổi tỉ xích hàm thử (rescaled test-functions method) và sau đó khai thác các tính chất thuần nhất của toán tử Δ_λ. Phương pháp này được sử dụng rộng rãi bởi nhiều tác giả, chẳng hạn như Gidas and Spruck trong

[31], Berestycki, Dolcetta và Nirenberg [11], Dolcetta và Cutrì [23], Mitidieri and Pohozaev [49]. Ý tưởng chính của phương pháp này là như sau: ta cố định một hằng số $R > 0$ và xét phương trình hoặc hệ phương trình trong các miền bị chặn, tiếp theo bằng cách nhân với một hàm thử phù hợp và nhờ các tính toán phù hợp, và sau đó cho R tiến ra vô hạn, ta thu được một phương trình hoặc hệ phương trình mới trong toàn không gian, từ đó ta thu được các nghiệm của ta chỉ là nghiệm tầm thường.

- **Trường hợp 2.** Các số mũ $p, q > 0$ sao cho $pq > 1$ và thỏa mãn điều kiện
$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \geq \frac{Q-2}{Q-1}.$$
Để thiết lập được định lí kiểu Liouville cho trường hợp này (xem chứng minh Định lí 4.2 mục 4.3), chúng tôi khai thác ý tưởng của Souto trong [66] cho toán tử Laplace, bằng cách xét phép đổi biến $w = uv$ ta sẽ quy bài toán về bất phương trình vô hướng và sau đó kết quả thu được nhờ áp dụng Hệ quả 4.1 cho bất đẳng thức ở mục 4.2.

4.2. Định lí kiểu Liouville cho trường hợp $p, q > 1$

Kết quả chính của mục này là định lí sau.

Định lí 4.1. *Cho* $p, q > 1$. *Khi đó hệ* (4.1) *không có nghiệm cổ điển dương* $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *nếu*
$$\max\{a, b\} \geq Q - 2,$$
ở đó $a = \dfrac{2(p+1)}{pq-1}$, $b = \dfrac{2(q+1)}{pq-1}$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lí này cho trường hợp $a \geq Q - 2$, và sau đó bằng cách hoán đổi vai trò của u và v, ta cũng đạt được cùng kết luận với $b \geq Q-2$.

Với $R > 0$, đặt $\Omega_R = B_1(0, R^{\epsilon_1}) \times B_2(0, R^{\epsilon_2}) \times \ldots \times B_N(0, R^{\epsilon_N})$ và xét N hàm $\varphi_{1,R}, \ldots, \varphi_{N,R}$ sao cho

$$\varphi_{1,R}(r_1) = \varphi_1(\frac{r_1}{R^{\epsilon_1}}), \ldots, \varphi_{N,R}(r_N) = \varphi_{N,R}(\frac{r_N}{R^{\epsilon_N}}), \tag{4.2}$$

với

$$\varphi_{1,R}, \ldots, \varphi_{N,R} \in C^\infty[0, +\infty),\ 0 \leq \varphi_{1,R}, \ldots, \varphi_{N,R} \leq 1, \tag{4.3}$$

$$\varphi_{1,R}, \ldots, \varphi_{N,R} = \begin{cases} 1 & \text{trong } [0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{trong } [1, +\infty), \end{cases}$$

và với hằng số $C > 0$ nào đó các hàm $\lambda_i(x), i = 1, \ldots, N$, và $\varphi_{1,R}, \ldots, \varphi_{N,R}$ thỏa mãn

$$-\frac{C}{R^{\epsilon_1}} \leq \frac{\partial \varphi_{1,R}}{\partial r_1} \leq 0, \ldots, -\frac{C}{R^{\epsilon_N}} \leq \frac{\partial \varphi_{N,R}}{\partial r_N} \leq 0, \tag{4.4}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi_{1,R}}{\partial r_1^2}\right| \leq \frac{C}{R^{2\epsilon_1}},\ \left|\frac{\partial^2 \varphi_{2,R}}{\partial r_2^2}\right| \leq \frac{C}{R^{2\epsilon_2}}, \ldots, \left|\frac{\partial^2 \varphi_{N,R}}{\partial r_N^2}\right| \leq \frac{C}{R^{2\epsilon_N}}, \tag{4.5}$$

trong đó $r_i = |x_i|$, $i = 1, \ldots, N$.

Sử dụng giả thiết 2) trên các hàm λ_i, $i = 1, \ldots, N$, với

$$r = (r_1, \ldots, r_N) = (|x_1|, \ldots, |x_N|)$$

ta có

$$\lambda_1(r) \equiv 1,\ \lambda_i(r) = \lambda_i(x),$$

và

$$\lambda_i(r) = \lambda_i(r_1, \ldots, r_{i-1}), \quad \forall i = 2, \ldots, N.$$

Ta đặt $\varphi_R = \varphi_{1,R} \dots \varphi_{N,R}$ và từ đó với $l \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
\Delta_\lambda \varphi_R^l &= \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\lambda_1^2(r)\frac{\partial \varphi_R^l}{\partial r_1}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial r_N}\left(\lambda_N^2(r)\frac{\partial \varphi_R^l}{\partial r_N}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_1}\left(l\lambda_1^2(r)\varphi_R^{l-1}\varphi'_{1,R}\varphi_{2,R}\dots\varphi_{N,R}\right) + \cdots \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial r_N}\left(l\lambda_N^2(r)\varphi_R^{l-1}\varphi_{1,R}\varphi_{2,R}\dots\varphi'_{N,R}\right) \\
&= l\lambda_1^2(x)(\varphi_{2,R}\dots\varphi_{N,R})^l[\varphi_{1,R}^{l-1}\varphi''_{1,R} + (l-1)\varphi_{1,R}^{l-2}\varphi'^2_{1,R}] + \cdots \\
&\quad + l\lambda_N^2(x)(\varphi_{1,R}\dots\varphi_{N-1,R})^l[\varphi_{N,R}^{l-1}\varphi''_{N,R} + (l-1)\varphi_{N,R}^{l-2}\varphi'^2_{N,R}].
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Từ tính thuần nhất của các hàm $\lambda_i, i = 1, \dots, N$, ta có

$$
|\lambda_i(x)| \leq CR^{\epsilon_i - 1}, \quad \forall x \in \Omega_R,\ i = 1, \dots, N. \tag{4.7}
$$

Thật vậy, với bất kì $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega_R$ ta có $x_i \in B_i(0, R^{\epsilon_i}), i = 1, \dots, N$, điều này suy ra $\dfrac{|x_i|}{R^{\epsilon_i}} \leq 1,\ i = 1, \dots, N$. Do đó, nếu ta viết

$$
x = (x_1, \dots, x_N) = \left(R^{\epsilon_1} \cdot \frac{x_1}{R^{\epsilon_1}}, \dots, R^{\epsilon_N} \cdot \frac{x_N}{R^{\epsilon_N}}\right)
$$

và đặt $y = (y_1, \dots, y_N) = (\dfrac{x_1}{R^{\epsilon_1}}, \dots, \dfrac{x_1}{R^{\epsilon_N}})$ thì $y \in \overline{\Omega}_1$. Từ đây và từ giả thiết 4) trên các hàm λ_i, ta thu được

$$
\begin{aligned}
\lambda_i(x) &= \lambda_i(R^{\epsilon_1}y_1, \dots, R^{\epsilon_N}y_N) = R^{\epsilon_i - 1}\lambda_i(y_1, \dots, y_N) \\
&= R^{\epsilon_i - 1}\lambda_i(y).
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Hơn nữa, vì $\lambda_i, i = 1, \dots, N$ là liên tục, nên ta thu được

$$
\lambda_i(y) \leq C \quad \forall y \in \overline{\Omega}_1. \tag{4.9}
$$

Do đó, từ (4.8) và (4.9) ta chứng tỏ được (4.7).

Tiếp theo, với $m, k \geq 2$ sẽ được cố định sau, ta kí kiệu

$$
I_{R,v} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} v^p\, \varphi_R^m\, dx \text{ và } I_{R,u} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q\, \varphi_R^k\, dx.
$$

Với tích phân $I_{R,v}$, ta suy ra từ bất đẳng thức thứ nhất trong (4.1),

$$\begin{aligned}
I_{R,v} &\le -\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta_\lambda u\, \varphi_R^m\, dx \\
&= -\int\limits_{\Omega_R} u\Delta_\lambda \varphi_R^m dx + \int\limits_{\partial\Omega_R} mu\, \varphi_R^{m-1} \nabla_\lambda \varphi_R \cdot \nu_\lambda dS \\
&= -\int\limits_{\Omega_R} u\, \Delta_\lambda \varphi_R^m\, dx.
\end{aligned}$$

Sử dụng (4.4)-(4.6) và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
I_{R,v} \le & -\int\limits_{\Sigma_R} mu\, \big[\lambda_1^2(x)(\varphi_{2,R}\dots\varphi_{N,R})^m[\varphi_{1,R}^{m-1}\varphi_{1,R}'' + (m-1)\varphi_{1,R}^{m-2}\varphi_{1,R}'^2] \\
& + \dots \\
& + m\lambda_N^2(x)(\varphi_{1,R}\dots\varphi_{N-1,R})^q[\varphi_{N,R}^{m-1}\varphi_{N,R}'' + (m-1)\varphi_{N,R}^{m-2}\varphi_{N,R}'^2]\big]\, dx \\
\le & -\int\limits_{\Sigma_R} mu\, \big[\lambda_1^2(x)(\varphi_{2,R}\dots\varphi_{N,R})^m\varphi_{1,R}^{m-1}\varphi_{1,R}'' + \dots \\
& \quad + \lambda_N^2(x)(\varphi_{1,R}\dots\varphi_{N-1,R})^q\varphi_{N,R}^{m-1}\varphi_{N,R}''\big]\, dx \\
\le & \frac{C}{R^2}\int\limits_{\Sigma_R} u\, (\varphi_{2,R}\dots\varphi_{N,R})^m \varphi_{1,R}^{m-1} dx \\
= & \frac{C}{R^2}\int\limits_{\Sigma_R} u\, \varphi_R^{m-1}(\varphi_{1,R}\dots\varphi_{N-1,R}) dx \\
\le & \frac{C}{R^2}\left(\int\limits_{\Sigma_R} u^q\, \varphi_R^{q(m-1)}\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\Sigma_R} (\varphi_{1,R}\dots\varphi_{N-1,R})^{q'} dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
\le & \frac{C}{R^2}\left(\int\limits_{\Sigma_R} u^q\, \varphi_R^{q(m-1)} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\Sigma_R} 1\, dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
= & CR^{\frac{Q}{q'}-2}\left(\int\limits_{\Sigma_R} u^q\, \varphi_R^{q(m-1)} dx\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

trong đó $\Sigma_R = \Omega_R \setminus (B_1(0, R/2) \times B_2(0, R^{\epsilon_2}/2) \times \ldots \times B_N(0, R^{\epsilon_N}/2))$ và $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Lặp lại các chứng minh ở trên, ta cũng thu được

$$I_{R,u} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^q \varphi_R^k dx \le C R^{\frac{Q}{q}-2} \left(\int\limits_{\Sigma_R} v^p \, \varphi_R^{p(k-1)} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.11}$$

Bây giờ, ta chọn $k \ge 2$ sao cho $1 + \dfrac{k}{q} < (k-1)p$, và sau đó lấy $m \ge 2$ sao cho $1 + \dfrac{k}{q} \le m \le (k-1)p$. Từ đó, $k \le q(m-1)$ và $m \le p(k-1)$. Do đó, từ (4.10) và (4.11) ta thu được

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v^p \varphi_R^m dx \right)^{pq} &\le C R^{(\frac{Q}{q'}-2)pq} \left(\int\limits_{\Sigma_R} u^q \, \varphi_R^{q(m-1)} dx \right)^{p} \\
&\le C R^{(\frac{Q}{q'}-2)pq} \left(\int\limits_{\Sigma^N} u^q \, \varphi_R^{k} dx \right)^{p} \\
&\le C R^{(\frac{Q}{q'}-2)pq + (\frac{Q}{q}-2)p} \left(\int\limits_{\Sigma_R} v^p \, \varphi_R^{p(k-1)} dx \right)^{\frac{p}{p}} \\
&\le C R^{(\frac{Q}{q'}-2)pq + (\frac{Q}{q}-2)p} \int\limits_{\Sigma_R} v^p \, \varphi_R^{m} dx.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Hơn nữa,

$$\left(\int\limits_{\Sigma_R} v^p \, \varphi_R^m dx \right)^{pq} \le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v^p \varphi_R^m dx \right)^{pq} \le C R^{(\frac{Q}{q'}-2)pq + (\frac{Q}{q}-2)p} \int\limits_{\Sigma_R} v^p \, \varphi_R^m dx.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_{\Sigma_R} v^p \, \varphi_R^m dx \right)^{pq-1} &\le C R^{(\frac{Q}{q'}-2)pq + (\frac{Q}{q}-2)p} \\
&= C R^{(Q-2)(pq-1)-2(p+1)}
\end{aligned}$$

$$= CR^{[(Q-2)-\frac{2(p+1)}{(pq-1)}](pq-1)}$$

$$= CR^{[(Q-2)-a](pq-1)}. \tag{4.13}$$

Trường hợp 1. Nếu $a = \dfrac{2(p+1)}{(pq-1)} > Q-2$ thì $[Q-2-a](pq-1) < 0$, và từ (4.13) ta thu được

$$\left(\int\limits_{\Sigma_R} v^p dx\right)^{pq-1} \le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v^p (\varphi_R)^m dx\right)^{pq} \le CR^{[(Q-2)-a](pq-1)}.$$

Cho $R \to \infty$, và vì $p, q > 1$, ta thu được

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v^p dx\right)^{pq-1} \le \lim_{R\to\infty} CR^{[(Q-2)-a](pq-1)} = 0.$$

Vì vậy $v \equiv 0$, và từ $u^p = -\Delta_\lambda v$ ta có $u \equiv 0$.

Trường hợp 2. Nếu $a = Q-2$, thì từ (4.12) ta suy ra rằng $I_{R,v}$ bị chặn đều theo R. Mặt khác, ta có

$$\int\limits_{\Sigma_R} v^p\, \varphi_R^m dx = \int\limits_{\Omega_R} v^p\, \varphi_R^m dx - \int\limits_{\Omega_{R/2}} v^p\, \varphi_R^m dx \to 0$$

khi $R \to \infty$. Điều này kéo theo rằng

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} v^p dx = 0,$$

và ta cũng kết luận được rằng $u \equiv v \equiv 0$.

Chứng minh của Định lí 4.1 được hoàn thành.

□

Như một hệ quả trực tiếp của Định lí 4.1, khi $u = v$ và $p = q$, ta thu được định lí kiểu Liouville sau cho bất đẳng thức elliptic

$$-\Delta_\lambda u \ge u^p \quad \text{trong } \mathbb{R}^N. \tag{4.14}$$

Hệ quả 4.1. *Giả sử* $1 < p \le \frac{Q}{Q-2}$. *Nếu* u *là một nghiệm cổ điển không âm của* (4.14), *thì* $u \equiv 0$.

4.3. Định lí kiểu Liouville cho trường hợp $p, q > 0$

Định lí 4.2. *Giả sử rằng* $p, q > 0$ *sao cho* $pq > 1$, *và*

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \ge \frac{Q-2}{Q-1}.$$

Khi đó hệ (4.1) *không có nghiệm cổ điển dương.*

Chứng minh. Ta đặt $w = uv$ và sau một vài tính toán đơn giản, ta có

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda w = \Delta_\lambda(uv) &= \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(\lambda_i^2(x)\partial_{x_i}(uv)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(\lambda_i^2(x)[v\partial_{x_i}u + u\partial_{x_i}v]) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2(x)\partial_{x_i}(v\partial_{x_i}u + u\partial_{x_i}v) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2(x)\left[2\partial_{x_i}u\partial_{x_i}v + v\partial_{x_ix_i}u + u\partial_{x_ix_i}v\right] \\
&= v\Delta_\lambda u + u\Delta_\lambda v + 2\nabla_\lambda u \nabla_\lambda v \\
&\le -v^{p+1} - u^{q+1} + 2\nabla_\lambda u \nabla_\lambda v, \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}w^{-1}|\nabla_\lambda w|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{w}|\nabla_\lambda w|^2 = \frac{1}{2uv}|\nabla_\lambda(uv)|^2 &= \frac{1}{2uv}|v\nabla_\lambda u + u\nabla_\lambda v|^2 \\
&= \frac{1}{2uv}\left[v^2|\nabla_\lambda u|^2 + 2uv\nabla_\lambda u\nabla_\lambda v + u^2|\nabla_\lambda v|^2\right] \\
&= \frac{v}{2u}|\nabla_\lambda u|^2 + \frac{u}{2v}|\nabla_\lambda v|^2 + \nabla_\lambda u \nabla_\lambda v. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Bây giờ, ta chọn $\alpha > 0$ sao cho $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1}$ và $\beta > 1$ thỏa mãn $\alpha\beta = p+1$. Từ đó, ta lấy β' là số liên hợp của β, tức là $\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\beta'} = 1$, thỏa mãn $\beta'\alpha = q+1$. Áp dụng bất đẳng thức Young, ta có

$$w^\alpha = (uv)^\alpha \le \frac{u^{\alpha\beta'}}{\beta'} + \frac{v^{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{u^{q+1}}{\beta'} + \frac{v^{p+1}}{\beta} \le u^{q+1} + v^{p+1}. \tag{4.17}$$

Từ (4.16) và sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}
2\nabla_\lambda u \nabla_\lambda v &\le \nabla_\lambda u \nabla_\lambda v + |\nabla_\lambda u \nabla_\lambda v| \\
&\le \nabla_\lambda u \nabla_\lambda v + \Big|\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}\nabla_\lambda u \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\nabla_\lambda v\Big| \\
&\le \nabla_\lambda u \nabla_\lambda v + \frac{v}{2u}|\nabla_\lambda u|^2 + \frac{u}{2v}|\nabla_\lambda v|^2 \\
&= \frac{1}{2}w^{-1}|\nabla_\lambda w|^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Từ (4.15), (4.17), và (4.18), ta thu được

$$\Delta_\lambda w + w^\alpha \le \frac{1}{2}w^{-1}|\nabla_\lambda w|^2. \tag{4.19}$$

Nếu ta đặt $w = g^2$ thì ta có

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda w = \Delta_\lambda(g^2) &= \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}(\lambda_i^2(x)\partial_{x_i} g^2) = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}(\lambda_i^2(x) 2g \partial_{x_i} g) \\
&= 2\sum_{i=1}^N \lambda_i^2(x)[(\partial_{x_i} g)^2 + g\partial_{x_i x_i} g] = 2g\Delta_\lambda g + 2|\nabla_\lambda g|^2,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

và

$$|\nabla_\lambda w|^2 = |\nabla_\lambda g^2|^2 = |2g\nabla_\lambda g|^2 = 4g^2|\nabla_\lambda g|^2. \tag{4.21}$$

Thay (4.20) và (4.21) vào (4.19), ta thu được

$$2g\Delta_\lambda g + 2|\nabla_\lambda g|^2 + g^{2\alpha} \le \frac{1}{2g^2}4g^2|\nabla_\lambda g|^2,$$

điều này tương đương với

$$-\Delta_\lambda g \geq \frac{1}{2} g^{2\alpha-1}.$$

Từ giả thiết $p, q > 0$ và thỏa mãn điều kiện $pq > 1$, nên ta có

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{p+q+2}{pq+p+q+1} < 1,$$

hay $\alpha > 1$, điều này tương đương với

$$2\alpha - 1 > 1.$$

Hơn nữa, từ giả thiết

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \geq \frac{Q-2}{Q-1}$$

ta thu được

$$2\alpha - 1 \leq \frac{Q}{Q-2}.$$

Do đó, ta có $1 < 2\alpha - 1 \leq \frac{Q}{Q-2}$, áp dụng Hệ quả 4.1 ở trên ta thu được $g \equiv 0$, và từ đó $u \equiv v \equiv 0$.

Chứng minh của Định lí 4.2 được hoàn thành.

□

Kết luận Chương 4

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu các định lí kiểu Liouville cho hệ bất đẳng thức elliptic chứa toán tử Δ_λ trong toàn không gian $\mathbb{R}^N, N \geq 2$. Các kết quả đạt được bao gồm:

1) Chứng minh được định lí kiểu Liouville (Định lí 4.1) cho hệ bất đẳng thức elliptic suy biến khi số mũ $p, q > 1$.

2) Chứng minh được định lí kiểu Liouville (Định lí 4.2) cho hệ bất đẳng thức elliptic suy biến khi số mũ $p, q > 0$ (với miền biến thiên của p, q khác với trường hợp $p, q > 1$).

Nói riêng, khi $u = v$ và $p = q$, ta thu được các định lí kiểu Liouville cho bất đẳng thức elliptic chứa toán tử Δ_λ. Khi $p, q > 1$, các kết quả nhận được ở trên là tối ưu (như đã biết trong trường hợp toán tử Laplace). Các kết quả trong chương này mở rộng các kết quả tương ứng trước đó cho toán tử Laplace trong [30, 49, 66], và cho toán tử Grushin trong [23].

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Luận án nghiên cứu sự tồn tại, không tồn tại và tính đa nghiệm của một số lớp phương trình, hệ phương trình, và hệ bất đẳng thức elliptic suy biến chứa toán tử Δ_λ. Các kết quả đạt được của luận án bao gồm:

1) Chứng minh được sự tồn tại và tính đa nghiệm của nghiệm yếu của phương trình elliptic suy biến nửa tuyến tính trong miền bị chặn, khi số hạng phi tuyến có độ tăng trưởng dưới tới hạn và không thỏa mãn điều kiện (AR).

2) Chứng minh được sự không tồn tại nghiệm cổ điển dương trong miền δ_t-hình sao và tính đa nghiệm của nghiệm yếu của hệ elliptic suy biến nửa tuyến tính dạng Hamilton trong miền bị chặn.

3) Thiết lập được một số định lí kiểu Liouville cho bất đẳng thức và hệ bất đẳng thức elliptic suy biến trong toàn không gian $\mathbb{R}^N$.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở cần được tiếp tục nghiên cứu bao gồm:

1) Nghiên cứu các điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình, hệ phương trình elliptic suy biến nói trên trong trường hợp số hạng phi tuyến có tăng trưởng tới hạn. Nghiên cứu tính chính quy của nghiệm yếu.

2) Nghiên cứu các ứng dụng của các định lí kiểu Liouville như đánh

giá hằng số phổ quát, đánh giá kì dị của nghiệm, đánh giá độ suy giảm, sự bùng nổ của nghiệm, ...

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ

[1] C.T. Anh and B.K. My, (2016), Existence of solutions to Δ_λ-Laplace equations without the Ambrosetti-Rabinowitz condition, *Complex Var. Elliptic Equ.* 61 No.1, 137-150. (SCIE)

[2] C.T. Anh and B.K. My, (2016), Liouville-type theorems for elliptic inequalities involving the Δ_λ-Laplace operator, *Complex Var. Elliptic Equ.* 61 No.7, 1002-1013. (SCIE)

[3] C.T. Anh and B.K. My, (2019), Existence and non-existence of solutions to a Hamiltonian strongly degenerate elliptic system, *Adv. Nonlinear Anal.* 8 No.1, 661-678. (SCIE)

Tài liệu tham khảo

[1] C.O. Alves, D.C. de Morais Filho, M.A. Souto, (2000), On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents, *Nonlinear Anal.* 42, 771-787.

[2] C.O. Alves, D.C. de Morais Filho, O.H. Miyagaki, (2004), Multiple solutions for an elliptic system on bounded and unbounded domains, *Nonlinear Anal.* 56, 555-568.

[3] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, (1994), Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Funct. Anal.* 122, 519-543.

[4] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, (1973), Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.* 14, 349-381.

[5] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, (2007), *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems,* in: Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 104, Cambridge University Press, Cambridge.

[6] L. D'Ambrosio and S. Lucente, (2003), Nonlinear Liouville theorems for Grushin and Tricomi operators, *J. Differential Equations* 193, 511-541.

[7] C.T. Anh, J. Lee and B.K. My, (2018), On classification of solutions to an elliptic equation involving the Grushin operator, *Complex Var. Elliptic Equ.* 63, 671-688.

[8] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, (2001), *Harmonic Function Theory*, second edition, Springer-Verlag, New York.

[9] T. Bartsch and D.G. de Figueiredo, (1999), Infinitely many solutions of nonlinear elliptic systems, *Progr. in Nonlinear Differential Equations Appl.* 35, Birkhäuser, Basel, 51-67.

[10] T. Bartsch and M. Willem, (1995), On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (11), 3555-3561.

[11] H. Berestycki, I.C. Dolcetta and L. Nirenberg, (1994), Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems, *Topol. Methods in Nonlinear Anal.* 4, 59-78.

[12] Z. Binlin, G. Molica Bisci, and R. Servadei, (2015), Superlinear nonlocal fractional problems with infinitely many solutions, *Nonlinearity* 28, 2247-2264.

[13] H. Brezis and L. Nirenberg, (1983), Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure. Appl. Math.* 88 (3), 437-477.

[14] A. Cauchy, (1844), Mémoires sur les fonctions complémentaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* 19, 1377-1384.

[15] G. Cerami, (1978), An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds, *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A.* 112, 332-336. (in Italian)

[16] G. Cerami, (1980), On the existence of eigenvalues for a nonlinear boundary value problem, *Ann. Mat. Pura Appl.* 124, 161-179. (in Italian)

[17] W.X. Chen and C. Li, (1991), Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations, *Duke Math. J.* 63, 615-622.

[18] J. Chen, X. Tang and Z. Gao, (2017), Infinitely many solutions for semilinear Δ_λ-Laplace equations with sign-changing potential and nonlinearity, *Studia Sci. Math. Hungar.* 54, 536-549.

[19] N.T. Chung, (2014), On a class of semilinear elliptic systems involving Grushin type operator, *Commun. Korean Math. Soc.* 29, No.1, pp.37-50.

[20] N.M. Chuong and T.D. Ke, (2004), Existence of solutions for a nonlinear degenerate elliptic system. *Electron. J. Differential Equations*, No 93, 15 pp.

[21] N.M. Chuong and T.D. Ke, (2005), Existence results for a semilinear parametric problem with Grushin type operator. *Electron. J. Differential Equations*, No 107, 12 pp.

[22] Ph. Clément, D.G. de Figueiredo and E. Mitidieri, (1992), Positive solutions of semilinear elliptic systems, *Comm. Partial Differential Equations* 17, 923-940.

[23] I.C. Dolcetta and A. Cutrì, (1997), On the Liouville property for the sublaplacians, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 25, 239-256.

[24] L. Dupaigne, (2011), *Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, xiv+321 pp.

[25] L.C. Evans, (1998), *Partial Differential Equations,* Providence, RI: Amer. Math. Soc. Vol 19. 749pp.

[26] D.G. de Figueiredo, (1996), Semilinear elliptic systems: A survey of superlinear problem, *Resnhas IME-USP.* Vol 2, No.4 373-391.

[27] D.G. de Figueiredo, J.A.M. do Ó and B. Ruf, (2005), An Orlicz-space approach to superlinear elliptic systems, *J. Funct. Anal.* 224, 471-496.

[28] D.G. de Figueiredo and P.L. Felmer, (1994), On superquadratic elliptic systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 343, 99-116.

[29] B. Franchi and E. Lanconelli, (1982), Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, (French) [A metric associated with a class of degenerate elliptic operators] Conference on linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982). *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 1983, Special Issue, 105-114 (1984).

[30] B. Gidas, (1980), Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Nonlinear partial differential equations in engineering and applied science* (Proc. Conf., Univ. Rhode Island, Kingston, R.I., 1979), pp. 255-273, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 54, Dekker, New York.

[31] B. Gidas and J. Spruck, (1981), Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 34, 525-598.

[32] B. Gidas and J. Spruck, (1981), A priori bounds for positive solutions of a nonlinear elliptic equations, *Comm. Partial Differential Equations.* 6, 883-901.

[33] D. Gilbag and N.S. Trudinger, (2001), *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 Edition, Springer.

[34] V.V. Grushin, (1971), On a class of elliptic pseudo differential operators degenerate on a submanifold, *Math. USSR Sbornik.* 13, 155-183. (in Russian)

[35] L. Hörmander, (1967), Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* 119, 147-171.

[36] J. Hulshof and R.C.A.M. van der Vorst, (1993), Differential systems with strongly indefinite variational structure, *J. Funct. Anal.* 114, 32-58.

[37] Y. Jabri, (2003), *The Mountain Pass Theorem: Variants, Generalizations and Some Applications.* Cambridge University Press, New York.

[38] A.E. Kogoj and E. Lanconelli, (2018), Linear and semilinear problems involving Δ_λ-Laplacians, *Two nonlinear days in Urbino 2017. Electron. J. Diff. Eqns.* Conf. 25, pp.167-178.

[39] A.E. Kogoj and E. Lanconelli, (2012), On semilinear Δ_λ-Laplace equation, *Nonlinear Anal.* 75, 4637-4649.

[40] N. Lam and G. Lu, (2013), N-Laplace equations in $\mathbb{R}^N$ with subcritical and critical growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition, *Adv. Nonlinear Stud.* 13, 289-308.

[41] N. Lam and G. Lu, (2014), Elliptic equations and systems with subcritical and critical exponential growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition, *J. Geom. Anal.* 24, 118-143.

[42] Y.Y. Li, (1989), Degree theory for second order nonlinear elliptic operators and its applications, *Comm. Partial Differential Equations* 14 (11), 1541-1578.

[43] S. Liu, (2010), On superlinear problems without the Ambrosetti and Rabinowitz condition, *Nonlinear Anal.* 73, 788-795.

[44] Z. Liu and Z.Q. Wang, (2004), On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition, *Adv. Nonlinear Stud.* 4, 563-574.

[45] D.T. Luyen and N.M. Tri, (2015), Existence of solutions to boundary-value problems for semilinear Δ_γ differential equations, *Math. Notes.* 97, 73-84.

[46] D.T. Luyen, (2017), Two nontrivial solutions of boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations, *Math. Notes.* 101, No. 5, 815-823.

[47] E. Mitidieri, (1993), A Rellich type identity and applications, *Comm. Partial Differential Equations* 18:1-2, 125-151.

[48] E. Mitidieri, (1996), Nonexistence of positive solutions of semilinear elliptic systems in $\mathbb{R}^N$. *Differential Integral Equations* 9, 465-479.

[49] E. Mitidieri and S.I. Pokhozhaev, (2001), A priori estimates and the absence of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities, *Proc. Steklov Inst. Math.* 234, 1-362. (in Russian)

[50] O.H. Miyagaki and M.A.S. Souto, (2008), Superlinear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition, *J. Differential Equations* 245, 3628-3638.

[51] R. Monti and D. Morbidelli, (2006), Kelvin transform for Grushin operators and critical semilinear equations, *Duke Math. J.* 131, 167-202.

[52] D.D. Monticelli, (2010), Maximum principles and the method of moving planes for a class of degenerate elliptic linear operators, *J. Eur. Math. Soc.* 12, 611-654.

[53] R.S. Palais and S. Smale, (1964), A generalized Morse theory, *Bull. Am. Math. Soc.* 70 165-172.

[54] L.A. Peletier and R. van der Vorst, (1992), Existence and nonexistence of positive solutions of nonlinear elliptic systems and the biharmonic equation, *Differential Integral Equations* 5, 747-767.

[55] S.I. Pohozaev, (1965), Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math. Dokl.* 5, 1408-1411. (in Russian)

[56] P. Poláčik, P. Quittner and P. Souplet, (2007), Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems, I: Elliptic equations and systems, *Duke Math. J.* 139, 555-579.

[57] P. Pucci and J. Serrin, (1986), A general variational identity, *Indiana Univ. Math. J.* 35, 681-703.

[58] P. Quittner and P. Souplet, (2007), *Superlinear Parabolic Problems: Blow-up, Global Existence and Steady States,* Birkhäuser Adv. Texts Basler Lehrbücher, Birkhäuser, Basel.

[59] P.H. Rabinowitz, (1986), *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI.

[60] B. Rahal, (2018), Liouville-type theorems with finite Morse index for semilinear Δ_λ-Laplace operators. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 25, no. 3, Art. 21, 19 pp.

[61] B. Rahal and M.K. Hamdani, (2018), Infinitely many solutions for Δ_α-Laplace equations with sign-changing potential, *J. Fixed Point Theory Appl.* 20, no. 4, Art. 137, 17 pp.

[62] M. Schechter and W. Zou, (2004), Superlinear problems, *Pacific J. Math.* 214, 145-160.

[63] J. Serrin and H. Zou, (1996), Non-existence of positive solutions of Lane-Emden systems, *Differential Integral Equations* 9, 635-653.

[64] J. Serrin and H. Zou, (2002), Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities, *Acta Math.* 189, 79-142.

[65] P. Souplet, (2009), The proof of the Lane-Emden conjecture in four space dimensions, *Adv. Math.* 221, 1409-1427.

[66] M.A.S. Souto, (1995), A priori estimates and existence of positive solutions of nonlinear cooperative elliptic systems, *Differential Integral Equations* 8, 1245-1258.

[67] P.T. Thuy and N.M. Tri, (2012), Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 19, 279-298.

[68] N.T.C. Thuy and N.M. Tri, (2002), Some existence and nonexistence results for boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators, *Russ. J. Math. Phys.* 9, 365-370.

[69] D.A. Tuan and P.Q. Hung, (2017), Liouville type theorem for nonlinear elliptic system involving Grushin operator, *J. Math. Anal. Appl.* 454 (2), 785-801.

[70] N.M. Tri, (1998), On Grushin's equation. *Mat. Zametki.* 63, 19-105. (in Russian)

[71] N.M. Tri and D.T. Luyen, (2018), Existence of infinitely many solutions for semilinear degenerate Schrödinger equations, *J. Math. Anal. Appl.* 461 (2), 1271-1286.

[72] R.C.A.M. Van der Vorst, (1992), Variational identities and applications to differential systems, *Arch. Rational Mech. Anal.* 116, No.4, 375-398.

[73] X. Yu, (2015), Liouville type theorem for nonlinear elliptic equation involving Grushin operators, *Comm. Contem. Math.* 17 (5): 1450050 (12p).

[74] M. Willem, (1996), *Minimax Theorems,* Birkhäuser, Boston.

[75] M. Willem, W. Zou, (2003), On a Schrödinger equation with periodic potential and spectrum point zero, *Indiana Univ. Math. J.* 52, 109-132.